Übungsblatt 6

Abgabe der Lösungen: Do. 09.12, 12:00

Aufgabe 1 DNF: Do it Yourself (Präsenzaufgabe)

Eine Grundeigenschaft der Aussagenlogik ist die *Dualität*: Konjunktion und Disjunktion sind zueinander *dual* in dem Sinne, dass

$$\phi \wedge \psi \equiv \neg(\neg\phi \vee \neg\psi) \qquad \text{und} \qquad \phi \vee \psi \equiv \neg(\neg\phi \wedge \neg\psi).$$

Definieren Sie eine zur CNF in diesem Sinne duale *disjunktive Normalform (DNF)*, bei der die Rollen von Konjunktion und Disjunktion vertauscht sind, und geben Sie ein Verfahren an, mit dem jede Formel in eine äquivalente DNF transformiert werden kann.

Nehmen Sie bei dieser Aufgabe an, dass Formeln aus Konjunktion, Disjunktion, Negation, $\top$, $\bot$ und Atomen aufgebaut sind.

Aufgabe 2 CNF und DNF (Präsenzaufgabe)

Bilden Sie zunächst NNF und dann sowohl CNF als auch DNF für die folgende aussagenlogische Formel:

$$\neg(A \to B) \wedge ((A \to (B \wedge C)) \to \neg C)$$

Achtung: Die Ergebnisse sollen gemäß der Umformungsregeln bzw. der rekursiven Definitionen aus der Vorlesung bzw. aus der obigen Aufgabe berechnet werden. Die bloße Angabe einer richtigen Antwort gilt nicht als Lösung. Im Laufe der Rechnung können dabei Formeln mittels Kommutativität, Assoziativität und Idempotenz von $\wedge$ und $\vee$ sowie **ausschließlich** der folgenden weiteren Gesetze vereinfacht bzw. umgeformt werden: $\phi \wedge \neg\phi \equiv \bot$, $\phi \vee \neg\phi \equiv \top$, $\phi \wedge \top \equiv \phi$, $\phi \wedge \bot \equiv \bot$, $\phi \vee \top \equiv \top$, $\phi \vee \bot \equiv \phi$.

Aufgabe 3 Resolution (Präsenzaufgabe)

Für die folgende Klauselmenge, konstruieren Sie einen Resolutionsbeweis der Unerfüllbarkeit. Organisieren Sie den Beweis in Form eines gerichteten Graphen, mit Klauseln als Knoten und gerichteten Kanten, die Klauseln mit ihren Resolventen verbinden.

$$\{D, B, C\}, \{\neg D, B\}, \{\neg C, B, \neg A\}, \{\neg C, B, A\}, \{\neg B, \neg A\}, \{\neg B, A\}$$

Aufgabe 4 CNF und DNF (4 Punkte)

Bilden Sie zunächst NNF und dann sowohl CNF als auch DNF für die folgende aussagenlogische Formel:

$$\neg(B \wedge (A \rightarrow \neg B)) \wedge ((B \wedge \neg C) \rightarrow A) \wedge \neg(C \rightarrow A).$$

Achtung: Beachten Sie dabei die gleichen Bedingungen wie in Aufgabe 2.

Aufgabe 5 Resolution (2 Punkte)

Analog zu Aufgabe 3, konstruieren Sie einen Resolutionsbeweis der Unerfüllbarkeit der gegebenen Klauselmenge:

$$\{D, B, \neg C\}, \{D, C\}, \{\neg D, B\}, \{\neg C, B, \neg A\}, \{C, B, \neg A\}, \{\neg B, \neg A\}, \{\neg B, A\}$$

Aufgabe 6 Resolutionsprinzip Falsch Gemacht (6 Punkte)

(a) *Inkorrekte Resolution.* Die folgende Resolutionsregel ist *inkorrekt*, in dem Sinne, dass sie den Korrektheitssatz nicht erfüllt. *3 Punkte*

$$\frac{C \cup \{A, B\} \qquad D \cup \{\neg A, \neg B\}}{C \cup D} \quad (Res_1)$$

Beweisen Sie das, indem Sie Klauseln C und D sowie eine Wahrheitsbelegung κ angeben, so dass κ die Prämissen erfüllt, aber nicht die Konklusion.

(b) *Unvollständige Resolution.* Man könnte versuchen, im Resolutionsverfahren statt Klauseln Listen von Literalen zu verwenden. Die Resolutionsregel würde dann lauten: *3 Punkte*

$$\frac{H_1 + [A] + T_1 \qquad H_2 + [\neg A] + T_2}{H_1 + H_2 + T_1 + T2} \quad (Res_2)$$

wobei $[A]$ die aus dem Eintrag A bestehende einelementige Liste und $+$ die Listenkonkatenation bezeichnet.

Zeigen Sie, dass ein auf allein dieser Regel basierendes Resolutionsverfahren nicht vollständig ist, indem Sie (mit formaler Begründung!) eine Menge M von Listen von Literalen angeben, für die das neue Verfahren keine leere Liste liefert, obwohl M einer unerfüllbaren CNF entspricht.

Hinweis: Man findet relativ kleine Beispiele. Betrachten Sie die Länge der Listen, die in Laufe des Verfahrens auftauchen können.

Aufgabe 7 Logische Folgerung durch Resolution (3 Punkte)

Beweisen Sie mittels Resolution, dass aus

$$\mathsf{Sonne} \vee \mathsf{Regen}, \qquad \mathsf{Regen} \rightarrow \mathsf{Regenschirm} \qquad \text{und} \qquad \mathsf{Regenschirm} \rightarrow \neg\mathsf{Regen} \vee \mathsf{Sonne}$$

Sonne folgt. Verfahren Sie hierzu wie folgt:

1. Bilden Sie eine aussagenlogische Implikation $\phi \to \psi$ zwischen den Fakten (ϕ) und der (angeblichen) Folgerung (ψ).

2. Bilden Sie $\xi = \neg(\phi \to \psi) = \phi \wedge \neg\psi$ (die Implikation $\phi \to \psi$ ist genau dann allgemeingültig, wenn ξ unerfüllbar ist).

3. Berechnen Sie NNF und anschließend CNF von ξ, in Form einer Klauselmenge M.

4. Wenden Sie das Resolutionsverfahren auf M an.

Aufgabe 8 (Dame $\vee$ Tiger) $\wedge$ Resolution (5 Punkte)

Der Gefangene aus Aufgabe 3, Übungsblatt 3 ist jetzt mit dem Resolutionsverfahren bewaffnet. Kann er damit im **Fall 1** bestimmen, ob eine Dame in einer der Räume ist?

Verwenden Sie Ihre aussagenlogische Formalisierung aus Aufgabe 3, Übungsblatt 3. Genauer gesagt ist je ein Resolutionsbeweis oder eine Widerlegung (mittels Resolution) für jede der vier Folgerungen $\Phi \vdash \phi$ gefragt, wobei Φ die Annahmen sind und ϕ eine der folgenden Aussagen ist: "Dame ist in Raum I", "Dame ist in Raum II", "Tiger ist in Raum I", "Tiger ist in Raum II". Verwenden Sie den Ansatz von Aufgabe 7. Es ist allerdings erlaubt, die Überprüfung von "Dame ist in Raum I" wegzulassen, falls "Tiger ist in Raum I" bewiesen ist, und umgekehrt; entsprechend für Raum II. (Dies lässt sich dadurch begründen, dass sich die beiden Aussagen gegenseitig ausschließen und daher nicht beide aus den Annahmen Φ folgen können, wenn wir ohne Beweis davon ausgehen, dass die Annahmen nicht widersprüchlich sind.)

Diese Aufgabe illustriert, dass unter der Annahme, dass Φ konsistent ist, für jede Formel ϕ genau drei Fälle möglich sind: $\Phi \vdash \phi$ oder $\Phi \vdash \neg\phi$ oder weder $\Phi \vdash \phi$ noch $\Phi \vdash \neg\phi$. Wenn es um die Frage geht, ob man eine Dame oder einen Tiger antrifft, ist der Unterschied zwischen diesen drei Alternativen überlebenswichtig: Man weiß, dass man gewinnt (der Raum ist mit einer Dame besetzt); man weiß, dass man verliert (der Raum ist mit einem Tiger besetzt); oder man muss beides riskieren (das Wissen ist unvollständig, und man kann nicht mit Sicherheit eine Möglichkeit ausschließen).

Die notwendige Angaben sind bequemlichkeitshalber wie folgt zusammengefasst.

Raum I	**Raum II**
In diesem Raum ist eine Dame, und in dem anderen Raum ist ein Tiger.	In einem dieser Räume ist eine Dame, in einem dieser Räume ist ein Tiger.

König: Die Aussage auf einem der Schilder ist wahr, die auf dem anderen ist falsch.

Bonusaufgabe: Maximal konsistente Mengen (+3 Punkte)

Wie Sie sich aus der Vorlesung erinnern, ist ein zentraler Schritt im Beweis der Vollständigkeit des natürlichen Schließens der Beweis des Lindenbaumlemmas, d.h. der Tatsache, dass jede konsistente Menge zu einer maximal konsistenten Menge erweitert werden kann.

Sei $\mathcal{A} = \{A_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ die Menge der Atome, und sei Φ die Formelmenge $\{A_i \to A_{i+1} \mid i \in \mathbb{N}\}$.

(a) Beweisen Sie, dass Φ konsistent ist. Nutzen Sie dafür den Korrektheitsatz aus der Vorlesung.

(b) Geben Sie eine vollständige Beschreibung der maximal konsistenten Mengen an, die Φ erweitern.

Hinweis: Sie dürfen die Resultate der Vorlesung verwenden.