Übungsblatt 4

Abgabe der Lösungen: Do. 25.11, 12:00

Aufgabe 1 Beweise in Fitch (Präsenzaufgabe)

Beweisen Sie folgende aussagenlogischen Formeln durch natürliches Schliessen (d.h. im Fitch-Kalkül):

(a) $\neg A \to (A \to B)$;

(b) $(A \to (B \land C)) \to (A \to B)$;

(c) $(A \land (B \to \neg A)) \to (A \land \neg B)$.

Was lässt sich – nachdem die Formeln bewiesen sind – über die Erfüllbarkeit und die Allgemeingültigkeit der einzelnen Formeln sagen?

Aufgabe 2 Beweise in Coq (Präsenzaufgabe)

Coq ist ein halbautomatischer Beweiser [1], der unter anderem verwendet werden kann, um aussagenlogische Formeln zu beweisen. Die Beweise können dabei in gleicher Weise organisiert werden wie Fitch-Beweise. Als Beispiel betrachten wir den folgenden Beweis der allgemeingültigen Formel $(q \to p) \to (\neg p \to \neg q)$.

```
Require Import Classical_Prop.      (** Lemmas für klassische Logik **)

Parameters p q : Prop.              (** Deklaration aussagenlogischer
                                        Variablen p und q **)
Theorem T1 : (q->p)->(~p->~q).      (** T1 ist der Name des Theorems **)
Proof.                              (** Anfang des Beweises **)
intro A.                            (**  -> I   **)
intro B.                            (**  -> I   **)
intro C.                            (**  ~ I   **)
assert p as D.
apply A; exact C.                   (**  -> E   **)
apply B; exact D.                   (**  False I **)
Qed.                                (** Ende des Beweises **)
```

Hier werden die Namen A, B und C als Bezeichnungen für die Zwischenschritte verwendet; `intro`, `apply`, `assert` und `exact` sind sogenannte *Taktiken*, die sich, grob gesagt, ähnlich wie die Regeln des Fitch-Kalküls auswirken.

- Lesen Sie das Coq-Cheat-Sheet von Andrej Bauer [2], und vergegenwärtigen Sie sich anhand des Kapitels "Basic Tactics", welche *Einführungs-* bzw. *Eliminations*-Regeln des Fitch-Kalküls jeweils welchen Coq-Taktiken (bzw. einfachen Kombinationen von Taktiken) entsprechen.

- Formalisieren Sie die Beweise aus Aufgabe 1 in Coq.

Hinweis: Die folgende Tabelle kann dabei helfen, zu einer Fitch-Regel jeweils die entsprechende Taktik zu finden.

Fitch-Regel	Coq-Taktik
$\wedge$ I	`split.`
$\wedge$ E_1	`destruct H as [H0 _]; exact H0.`
$\wedge$ E_2	`destruct H as [_ H0]; exact H0.`
$\vee$ I_1	`left.`
$\vee$ I_2	`right.`
$\vee$ E	`destruct H as [L|R]. apply H0; exact L. apply H1; exact R.`
$\rightarrow$ I	`intro.`
$\rightarrow$ E	`apply H; exact H0.`
$\neg$ I	`intro.`
$\neg$ E	`apply NNPP.`
$\perp$ I	`apply H.`
$\perp$ E	`contradiction.`

Ferner ist es gelegentlich hilfreich, während eines Beweises von Hand benannte Unterziele einzuführen, die man, wenn sie bewiesen sind, als zusätzliche Annahmen verwenden darf. Dies geschieht mittels `assert (<Formel>) as <Name>`.

Aufgabe 3 Kirsch-Bananen-Kalkül (6 Punkte)

Wir definieren den Kirsch-Bananen-Kalkül wie folgt durch die Regeln (ii) bis (iv):

$$\frac{}{\text{🍒}}\;\text{(i)} \qquad \frac{\phi}{\text{🍌}\phi}\;\text{(ii)} \qquad \frac{\phi\,\text{🍌} \qquad \text{🍌}\,\psi}{\phi\psi}\;\text{(iii)} \qquad \frac{\phi}{\text{🍒}\phi\text{🍌}}\;\text{(iv)}$$

Dabei sind ϕ und ψ **nichtleere** Zeichenketten, die aus 🍒 und 🍌 bestehen (d.h. die „Formeln" des Kalküls sind durch die folgende Grammatik definiert: $\phi ::= \text{🍒} \mid \text{🍌} \mid \text{🍒}\phi \mid \text{🍌}\phi$). Die Zeichenkette 🍒🍒🍒 lässt sich beispielsweise wie folgt herleiten:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\text{🍒}}\;\text{(i)}}{\text{🍒🍒🍌}}\;\text{(iv)} \qquad \dfrac{\dfrac{}{\text{🍒}}\;\text{(i)}}{\text{🍌🍒}}\;\text{(ii)}}{\text{🍒🍒🍒}}\;\text{(iii)}$$

(a) Beweisen Sie, dass jede Zeichenkette der Form 🍌🍒 … 🍒🍌 mit einer geraden und positiven Anzahl von Kirschen im Kirsch-Bananen-Kalkül herleitbar ist. **Hinweis:** Induktion. *2 Punkte*

(b) Beweisen Sie, dass **keine** nichtleere Zeichenkette, die ausschließlich aus 🍌 besteht, im Kirsch-Bananen-Kalkül herleitbar ist. *3 Punkte*

(c) Beweisen oder widerlegen Sie, dass die Regel *1 Punkt*

$$\frac{\phi\psi}{\phi}$$

im Kirsch-Bananen-Kalkül zulässig ist. **Hinweis:** „Zulässig" heißt, dass man, wenn man die neue Regel zum Kalkül hinzufügt, trotzdem keine neue Zeichenketten herleiten kann.

Aufgabe 4 Fitch mit Disjunktion (4 Punkte)

Disjunktion ist bekanntermaßen durch Konjunktion und Negation definiert. Formeln, die Disjunktionen enthalten, kann man dementsprechend in zwei Schritten beweisen: zunächst $\lor$ durch $\land$ und $\neg$ ersetzen, danach den Fitch-Kalkül verwenden. In der Vorlesung wurden ohne Herleitung Disjunktionsregeln eingeführt. Zunächst betrachten wir die Introduktionsregeln:

$$\frac{A}{A \lor B}\ (\lor\mathrm{I}_1) \qquad\qquad \frac{B}{A \lor B}\ (\lor\mathrm{I}_2)$$

Sie lassen sich wie folgt im Fitch-Kalkül herleiten:

1	A	
2	$\quad \neg A \land \neg B$	
3	$\quad \neg A$	$\land\mathrm{E}_1$, 2
4	$\quad \bot$	$\bot\mathrm{I}$, 1, 3
5	$\neg(\neg A \land \neg B)$	$\neg\mathrm{I}$, 2–4

1	B	
2	$\quad \neg A \land \neg B$	
3	$\quad \neg B$	$\land\mathrm{E}_2$, 2
4	$\quad \bot$	$\bot\mathrm{I}$, 1, 3
5	$\neg(\neg A \land \neg B)$	$\neg\mathrm{I}$, 2–4

Nun betrachten wir die Disjunktions-Eliminationsregel genauer:

$$\frac{\begin{array}{|l} A \\ \hline \vdots \\ C \end{array} \qquad \begin{array}{|l} B \\ \hline \vdots \\ C \end{array} \qquad A \lor B}{C}\ (\lor\mathrm{E})$$

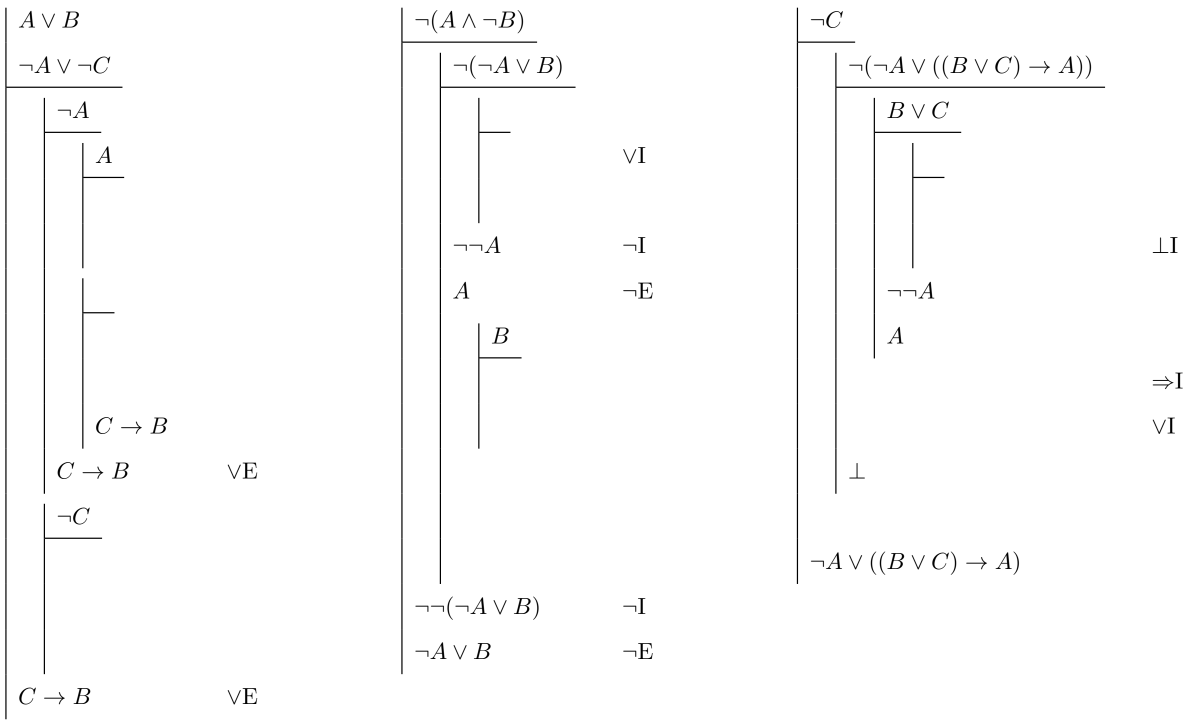
Leiten Sie diese Regel im Fitch-Kalkül her.

Hinweis: Führen Sie den Beweis, indem Sie in einem Teilbeweis $\neg C$ annehmen und per Beweis durch Widerspruch $\neg\neg C$ herleiten.

Aufgabe 5 Lückenhafte Beweislage (6 Punkte)

jeweils 2 Punkte

Vervollständigen Sie die folgenden Fitch-Beweise, indem Sie die fehlenden Formeln sowie die dazugehörigen Regelanwendungen angeben.



a) b) c)

Achtung! Annotieren Sie Ihre Beweise zeilenweise mit der jeweils angewendeten Regelinstanz wie in der Vorlesung.

Aufgabe 6 Logische Schlussfolgerungen in Fitch (4 Punkte)

Betrachten Sie die folgenden Paare von Formeln:

(a) $(\phi \to \xi) \wedge (\neg\psi \vee \xi)$ und $(\phi \vee \psi) \to \xi$; *2 Punkte*

(b) $\phi \wedge (\psi \to \neg\phi)$ und $\neg(\phi \to \psi)$. *2 Punkte*

Für jedes Paar folgt mindestens eine der Formeln aus der jeweils anderen (wenn die Formeln äquivalent sind, folgt sogar sowohl die zweite Formel aus der ersten als auch die erste Formel aus der zweiten).

Beweisen Sie pro Paar mindestens eine solche logische Folgerung im Fitch-Kalkül indem Sie eine Formel des jeweiligen Paares als Prämisse verwenden und daraus die andere Formel herleiten.

Achtung: Verwenden Sie nur die in Vorlesung und Übung vorgestellten Regeln. Es ist nicht erlaubt, Formeln durch bekannte Äquivalenzen oder Abkürzungen zu ersetzen!

Links

[1] *The Coq Proof Assistant*, `https://coq.inria.fr/`.

[2] *Andrej Bauer, Coq cheat sheet*, `https://github.com/andrejbauer/Homotopy/blob/master/OberwolfachTutorial/cheatsheet.pdf`.