Friedrich-Alexander-Universität
Erlangen-Nürnberg

Characterization of Non-Expansive Fragments of Łukasiewicz Propositional and Modal Logics

Bachelorvortrag des Lehrstuhls für theoretische Informatik

Franz Schlicht

July 24, 2025

Motivation

- fuzzy Beschreibungslogiken bieten interessante Erweiterung zu zweiwertigen Beschreibungslogiken
- mehrere fuzzy Logiken möglich

Łukasiewicz **Zadeh**

Motivation

- fuzzy Beschreibungslogiken bieten interessante Erweiterung zu zweiwertigen Beschreibungslogiken
- mehrere fuzzy Logiken möglich

Ausdrucksstärke: **Łukasiewicz** **>** **Zadeh**

Motivation

- fuzzy Beschreibungslogiken bieten interessante Erweiterung zu zweiwertigen Beschreibungslogiken
- mehrere fuzzy Logiken möglich

Ausdrucksstärke:	**Łukasiewicz**	**>**	**Zadeh**
Komplexität:	hohe Komplexität/ Unentscheidbar		niedrige Komplexität

Motivation

- fuzzy Beschreibungslogiken bieten interessante Erweiterung zu zweiwertigen Beschreibungslogiken
- mehrere fuzzy Logiken möglich

Ausdrucksstärke:	**Łukasiewicz**	**Nonexpansive fuzzy ALC**	**Zadeh**
Komplexität:	hohe Komplexität/ Unentscheidbar		niedrige Komplexität

Nonexpansive fuzzy ALC bietet Mittelweg

Motivation

- fuzzy Beschreibungslogiken bieten interessante Erweiterung zu zweiwertigen Beschreibungslogiken
- mehrere fuzzy Logiken möglich

Ausdrucksstärke:	**Łukasiewicz**	**>**	**Nonexpansive fuzzy ALC**	**>**	**Zadeh**
Komplexität:	hohe Komplexität/ Unentscheidbar				niedrige Komplexität

Nonexpansive fuzzy ALC bietet Mittelweg

Motivation

- fuzzy Beschreibungslogiken bieten interessante Erweiterung zu zweiwertigen Beschreibungslogiken
- mehrere fuzzy Logiken möglich

Ausdrucksstärke:	**Łukasiewicz**	**>**	**Nonexpansive fuzzy ALC**	**>**	**Zadeh**
			"relevante" Formeln ausdrückbar		
Komplexität:	hohe Komplexität/ Unentscheidbar				niedrige Komplexität

Nonexpansive fuzzy ALC bietet Mittelweg

Motivation

- fuzzy Beschreibungslogiken bieten interessante Erweiterung zu zweiwertigen Beschreibungslogiken
- mehrere fuzzy Logiken möglich

Ausdrucksstärke:	**Łukasiewicz**	**>**	**Nonexpansive fuzzy ALC**	**>**	**Zadeh**
			"relevante" Formeln ausdrückbar		
Komplexität:	hohe Komplexität/ Unentscheidbar		niedrige Komplexität		niedrige Komplexität

Nonexpansive fuzzy ALC bietet Mittelweg

Zadeh Logic

Syntax

$$\phi, \psi ::= p|\neg\phi|\phi \sqcap \psi|\Diamond\phi \tag{1}$$

$p \in At$

Zadeh Logic

Syntax

$$\phi, \psi ::= p|\neg\phi|\phi \sqcap \psi|\Diamond\phi \tag{1}$$

$p \in At$

fuzzy Modelle

- At: Menge an Atomen.
- $\mathscr{A} = (A, (p^{\mathscr{A}})_{p\in At}, R^{\mathscr{A}})$ fuzzy Modell mit
  - A: Menge an Zuständen
  - $p^{\mathscr{A}} : A \to [0, 1]$ für jedes Atom p
  - $R^{\mathscr{A}} : A \times A \to [0, 1]$

Zadeh Logic

Syntax

$$\phi, \psi ::= p|\neg\phi|\phi \sqcap \psi|\Diamond\phi \tag{1}$$

$p \in At$

fuzzy Modelle

- At: Menge an Atomen.
- $\mathscr{A} = (A, (p^{\mathscr{A}})_{p\in At}, R^{\mathscr{A}})$ fuzzy Modell mit
  - A: Menge an Zuständen
  - $p^{\mathscr{A}} : A \to [0,1]$ für jedes Atom p
  - $R^{\mathscr{A}} : A \times A \to [0,1]$

Semantik

- Sei $a \in At$ ein Zustand
- Evaluation $\phi^{\mathscr{A}}(a) \in [0,1]$ einer Formel ϕ am Zustand a
  - $p(a) = p^{\mathscr{A}}(a)$
  - $(\neg\phi)(a) = 1 - \phi(a)$
  - $(\phi \sqcap \psi)(a) = min(\phi(a), \psi(a))$
  - $(\Diamond\phi)(a) = sup_{a'\in A}(R^{\mathscr{A}}(a,a'), \phi(a'))$
- Propositionaler Fall: $\phi^{\mathscr{A}} : [0,1]^{At} \to [0,1]$

Nonexpansive Fuzzy ALC

Zadeh ist **syntaktisches Fragment** von N.e. ALC

Syntax

$$\phi, \psi ::= c|p|\neg\phi|\phi \sqcap \psi|\phi \oplus c|\Diamond\phi \tag{2}$$

$p \in At, c \in [0,1]$

fuzzy Modelle

- At: Menge an Atomen.
- $\mathscr{A} = (A, (p^{\mathscr{A}})_{p \in At}, R^{\mathscr{A}})$ fuzzy Modell mit
  - A: Menge an Zuständen
  - $p^{\mathscr{A}} : A \to [0,1]$ für jedes Atom p
  - $R^{\mathscr{A}} : A \times A \to [0,1]$

Semantik

- Sei $a \in At$ ein Zustand
- Evaluation $\phi^{\mathscr{A}}(a) \in [0,1]$ einer Formel ϕ am Zustand a
  - $c(a) = c$
  - $p(a) = p^{\mathscr{A}}(a)$
  - $(\neg\phi)(a) = 1 - \phi(a)$
  - $(\phi \sqcap \psi)(a) = min(\phi(a), \psi(a))$
  - $(\phi \oplus c)(a) = min(1, \phi(a) + c)$
  - $(\Diamond\phi)(a) = sup_{a' \in A}(R^{\mathscr{A}}(a, a'), \phi(a'))$
- Propositionaler Fall: $\phi^{\mathscr{A}} : [0,1]^{At} \to [0,1]$

Łukasiewicz Logik

N.e. ALC ist **syntaktisches Fragment** von Ł

Syntax

$$\phi, \psi ::= c|p|\neg\phi|\phi \sqcap \psi|\phi \oplus \psi|\Diamond\phi \tag{3}$$

$p \in At, c \in [0, 1]$

fuzzy Modelle

- At: Menge an Atomen.
- $\mathscr{A} = (A, (p^{\mathscr{A}})_{p \in At}, R^{\mathscr{A}})$ fuzzy Modell mit
  - A: Menge an Zuständen
  - $p^{\mathscr{A}} : A \to [0, 1]$ für jedes Atom p
  - $R^{\mathscr{A}} : A \times A \to [0, 1]$

Semantik

- Sei $a \in At$ ein Zustand
- Evaluation $\phi^{\mathscr{A}}(a) \in [0, 1]$ einer Formel ϕ am Zustand a
  - $c(a) = c$
  - $p(a) = p^{\mathscr{A}}(a)$
  - $(\neg\phi)(a) = 1 - \phi(a)$
  - $(\phi \sqcap \psi)(a) = min(\phi(a), \psi(a))$
  - $(\phi \oplus \psi)(a) = min(1, \phi(a) + \psi(a))$
  - $(\Diamond\phi)(a) = sup_{a' \in A}(R^{\mathscr{A}}(a, a'), \phi(a'))$
- Propositionaler Fall: $\phi^{\mathscr{A}} : [0, 1]^{At} \to [0, 1]$

Nichtexpansive Funktionen

nichtexpansive Funktion

Seien (X, d_1) und (Y, d_2) (pseudo)metrische Räume. Eine Funktion $f : X \to Y$ heißt nichtexpansiv, falls gilt

$$\forall x_1, x_2 \in X. d_2(f(x_1), f(x_2)) \leq d_1(x_1, x_2) \tag{4}$$

Nichtexpansive Funktionen

nichtexpansive Funktion

Seien (X, d_1) und (Y, d_2) (pseudo)metrische Räume. Eine Funktion $f : X \to Y$ heißt nichtexpansiv, falls gilt

$$\forall x_1, x_2 \in X. d_2(f(x_1), f(x_2)) \leq d_1(x_1, x_2) \tag{4}$$

nichtexpansive Formel

Eine Formel heißt nichtexpansiv (bezüglich Verhaltensdistanz), falls ihre Evaluationsfunktion nichtexpansiv (bezüglich Verhaltensdistanz) ist

für propositionale Formeln entspricht Verhaltensdistanz der Supremumsnorm

These dieser Arbeit

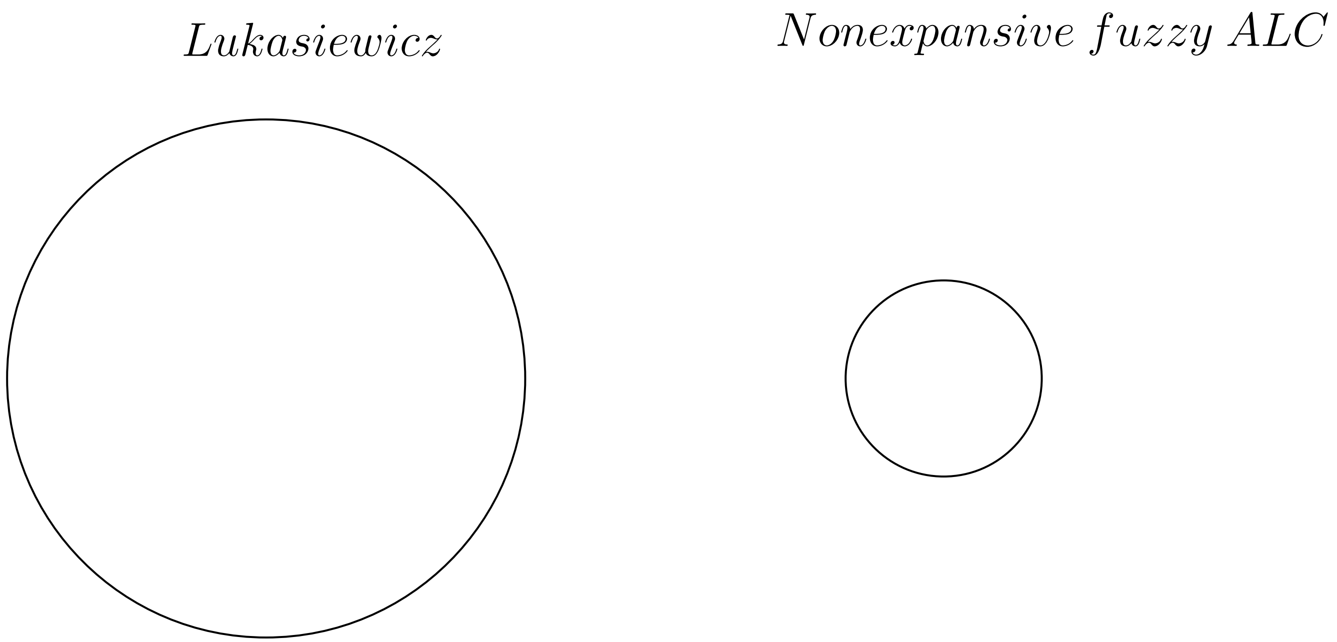
Nonexpansive fuzzy ALC ist das **nichtexpansive Fragment** von Łukasiewicz

These dieser Arbeit

Nonexpansive fuzzy ALC ist das **nichtexpansive Fragment** von Łukasiewicz

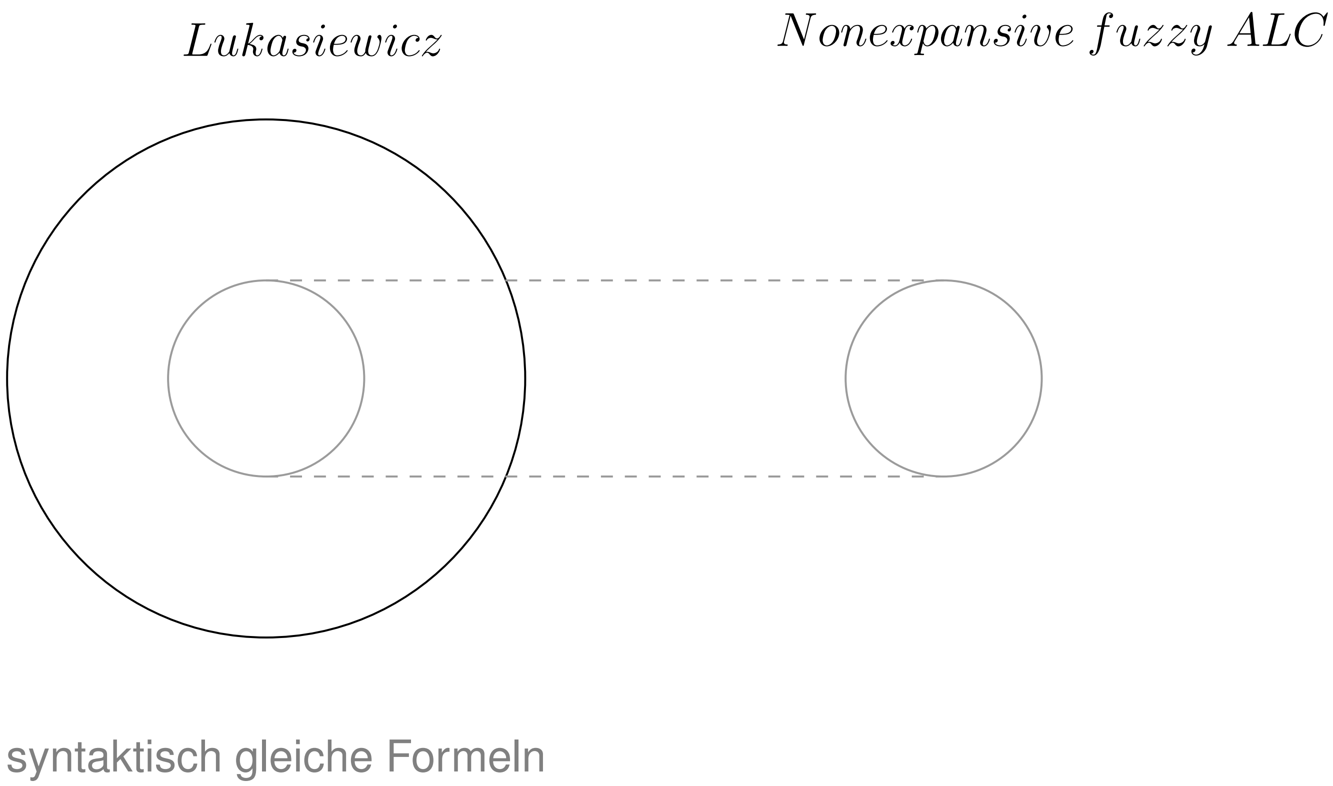
1. jede Fromel aus Nonexpansive fuzzy ALC ist nichtexpansiv (per Induktion über Konnektive ✓
2. für jede nichtexpansive Formel aus Ł exisitert eine Formel aus Nonexpansive fuzzy ALC, sodass beide Formeln zur gleichen Funktion auswerten

These dieser Arbeit



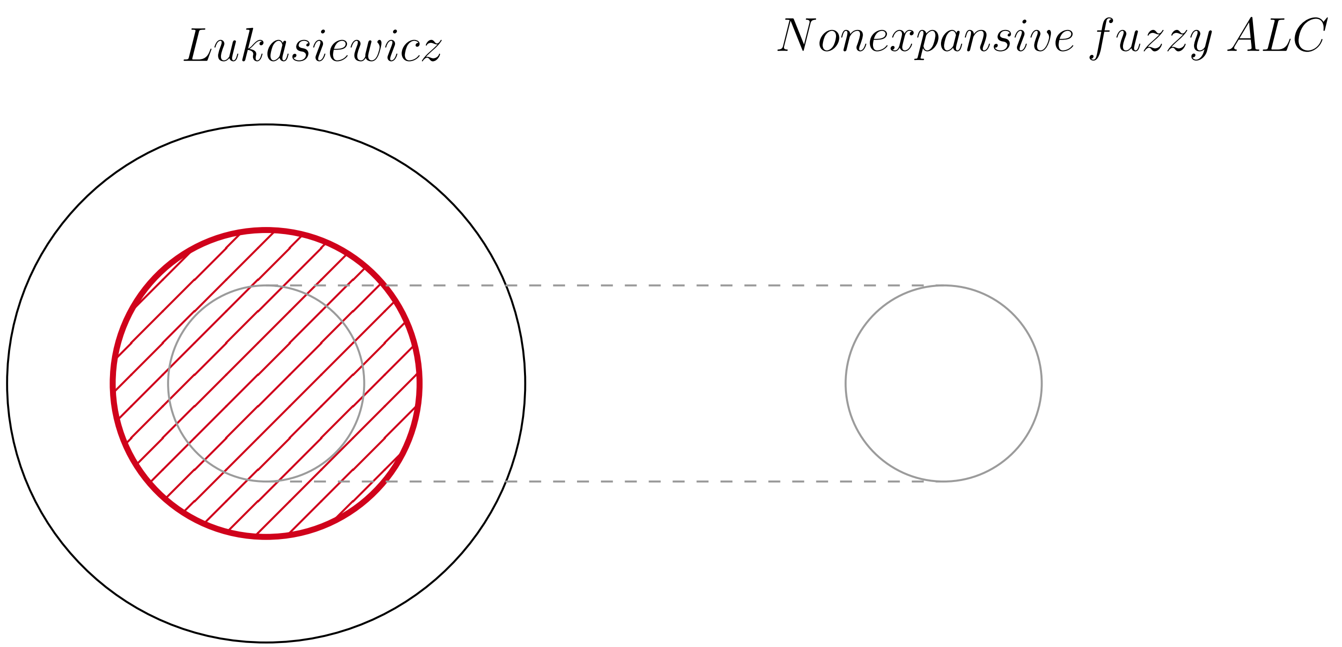
Beispiele:

These dieser Arbeit



Beispiele:
$p \oplus 0.1 \in$ Ł und $p \oplus 0.1 \in Ne.ALC$

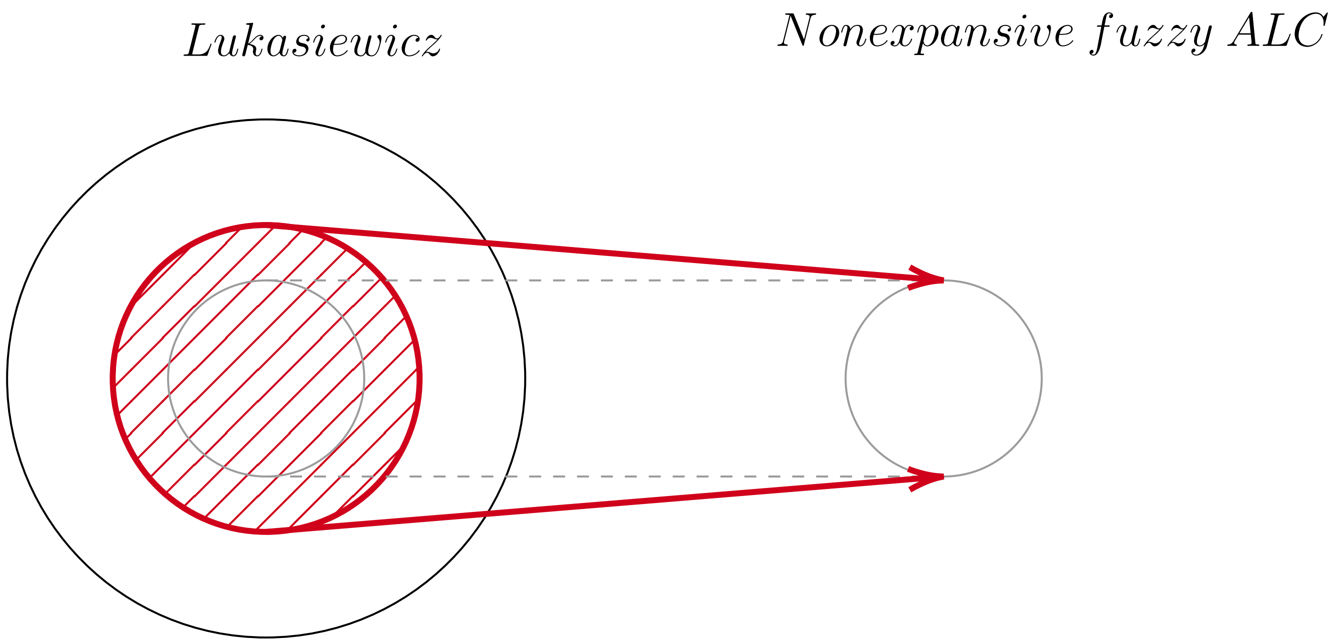
These dieser Arbeit



syntaktisch gleiche Formeln
nichtexpansive Formeln

Beispiele:
$p \oplus 0.1 \in$ Ł und $p \oplus 0.1 \in Ne.ALC$
$(p \oplus p) \sqcap 0 \in$ Ł

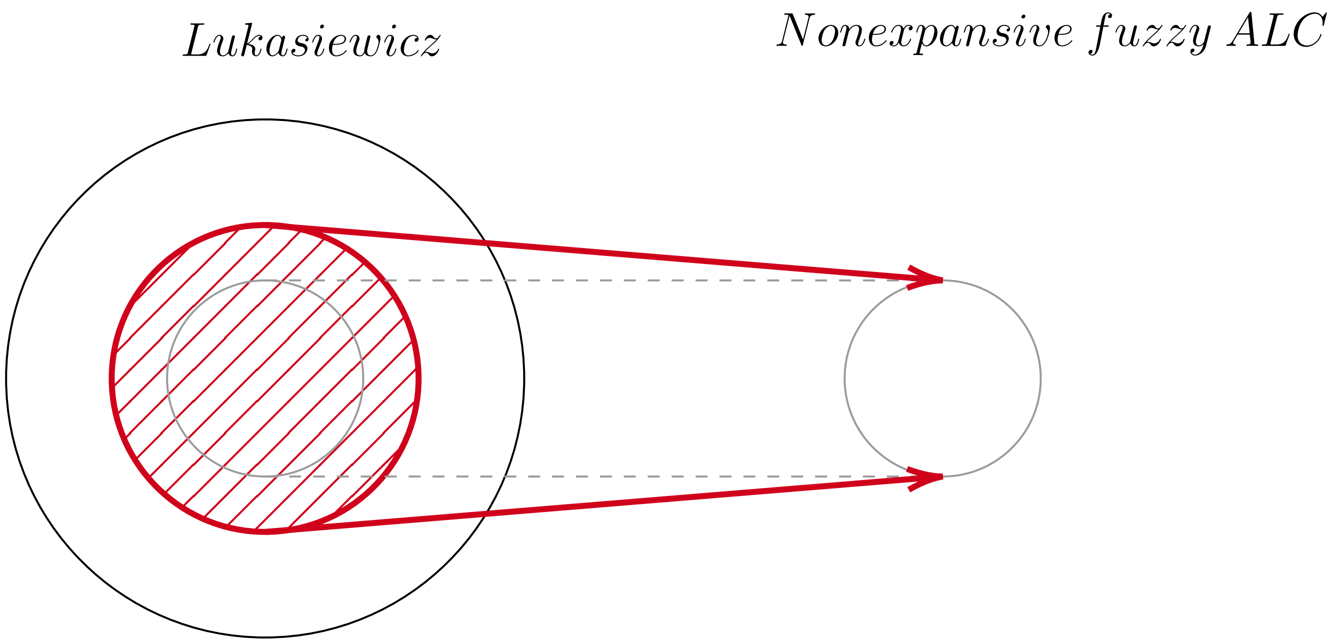
These dieser Arbeit



Beispiele:
$p \oplus 0.1 \in$ Ł und $p \oplus 0.1 \in Ne.ALC$
$(p \oplus p) \sqcap 0 \in$ Ł und $0 \in Ne.ALC$

syntaktisch gleiche Formeln
nichtexpansive Formeln

These dieser Arbeit



syntaktisch gleiche Formeln

nichtexpansive Formeln

Beispiele:

$p \oplus 0.1 \in$ Ł und $p \oplus 0.1 \in Ne.ALC$

$(p \oplus p) \sqcap 0 \in$ Ł und $0 \in Ne.ALC$

$p \oplus p \in$ Ł aber $p \oplus p \notin Ne.ALC$

(und es exisitert keine äquivalente Formel)

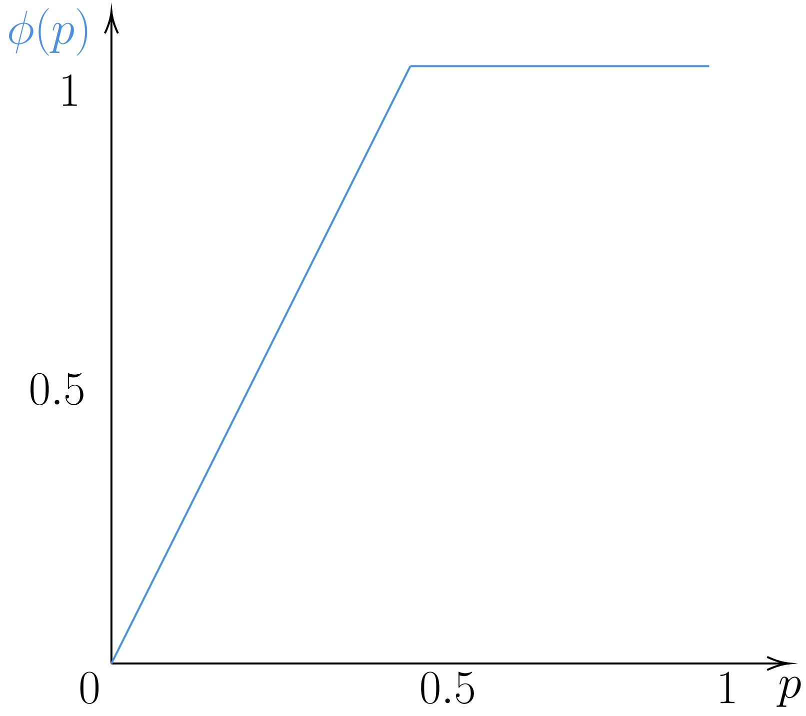
Nichtexpansivität entspricht Bisimilarität

- Begriff der Bisimilarität kann auf fuzzy Modelle erweitert werden
- Verhaltensdistanz d^G kann über ein fuzzy Bisimulationsspiel definiert werden
- logische Distanz d^L wird über nichtexpansive Formeln definiert
- d^L entspricht d^G

Wil+18

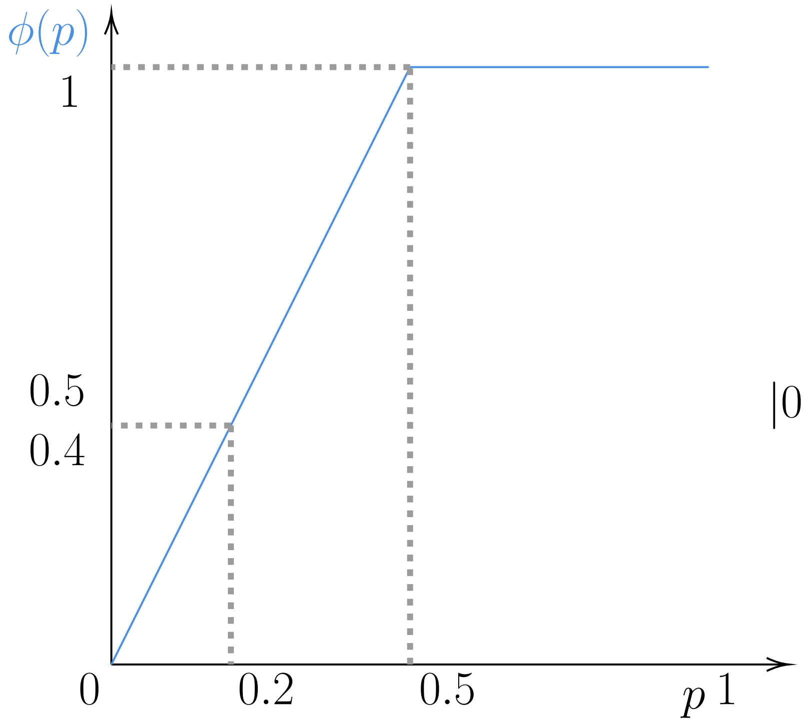
Beispiel: expansive Formeln

$\phi = p \oplus p$
Evaluationsfunktion $\phi(p) = min(2p, 1)$



Beispiel: expansive Formeln

$\phi = p \oplus p$
Evaluationsfunktion $\phi(p) = min(2p, 1)$



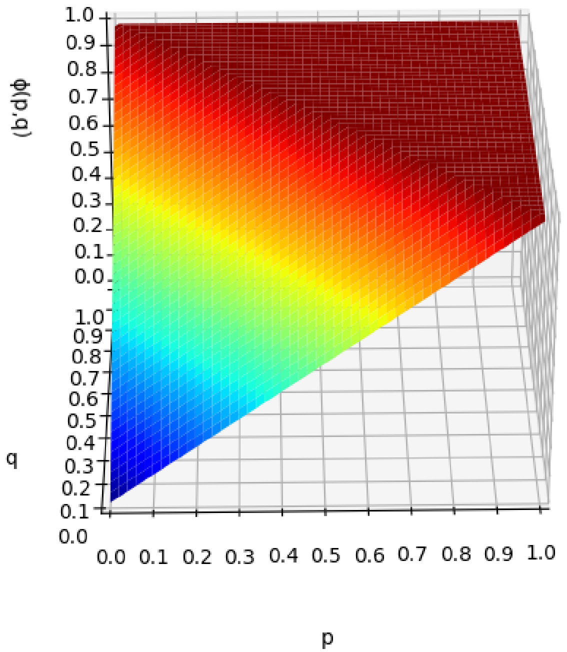
$$\begin{aligned} \phi(0.2) &= 0.4 \\ \phi(0.5) &= 1 \end{aligned}$$

$$|0.4 - 1| = 0.6 > |0.2 - 0.5| = 0.3$$

Beispiel: expansive Formeln

$\phi = p \oplus q$

Evaulationsfunktion: $\phi\left(\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}\right) = min(p+q, 1)$



$$\phi\left(\begin{pmatrix} 0.2 \\ 0.2 \end{pmatrix}\right) = 0.4$$

$$\phi\left(\begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{pmatrix}\right) = 1$$

$$\left\| \begin{pmatrix} 0.2 \\ 0.2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{pmatrix} \right\|_\infty = 0.3$$

$$|0.4 - 1| = 0.6 > 0.3$$

Vorgehen Beweis

1. Jede nichtexpansive Formel aus Ł hat eine Evaluatiosfunktion der Form ...
2. Jede Funktion der Form ... ist Evaluationsfunktion einer Formel aus Nonexpansive fuzzy ALC

Evaluationsfunktionen von beliebigen Formeln aus Ł

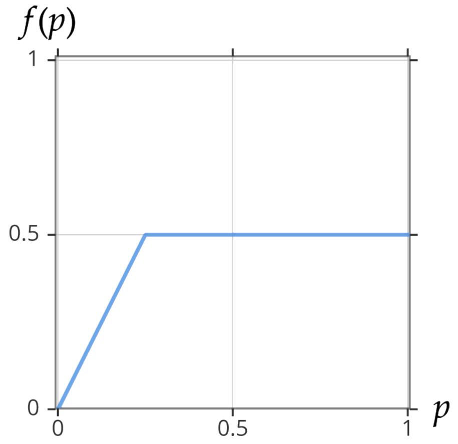
Sei ϕ eine Formel aus Ł mit n verschiedenen Variablen. Die Evaluationsfunktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ von ϕ hat die Form

1. f ist stetig
2. es gibt eine endliche Anzahl unterschiedlicher affin linearer Funktionen (*Komponenten*) $\lambda_1, ..., \lambda_\mu$ von der Form $\lambda_j = b_j + m_{1j}x_1 + ... + m_{nj}x_n$ mit $b_j \in \mathbb{R}, m_{ij} \in \mathbb{Z}$
   $\forall x \in [0,1]^n . \exists j \in 1, .., \mu . f(x) = \lambda(x)$

McN51

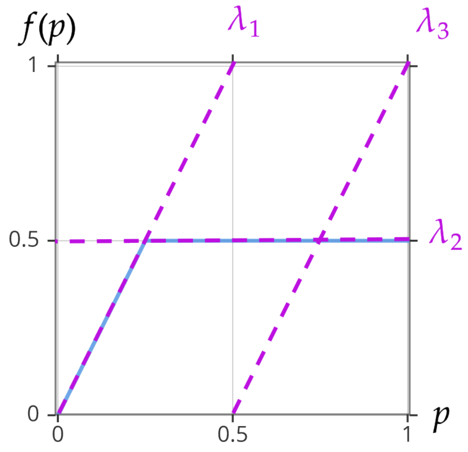
Beispiel: expansive Funktion

$f(p) = min(2p, 0.5)$



Beispiel: expansive Funktion

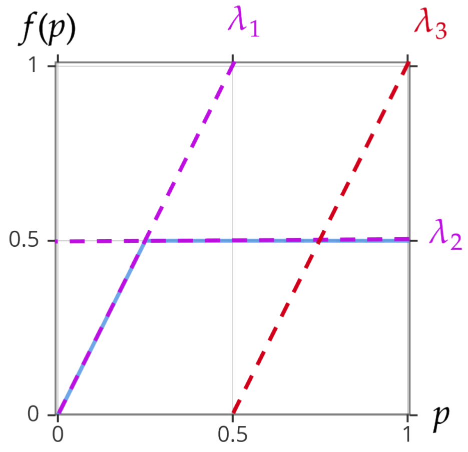
$f(p) = min(2p, 0.5)$



$$\lambda_1(p) = 2p$$
$$\lambda_2(p) = 0.5$$
$$\lambda_3(p) = 2p - 0.5$$

Beispiel: expansive Funktion

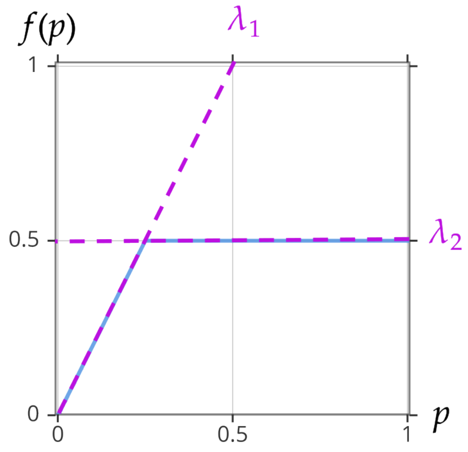
$f(p) = min(2p, 0.5)$



$$\lambda_1(p) = 2p$$
$$\lambda_2(p) = 0.5$$
$$\lambda_3(p) = 2p - 0.5$$

Beispiel: expansive Funktion

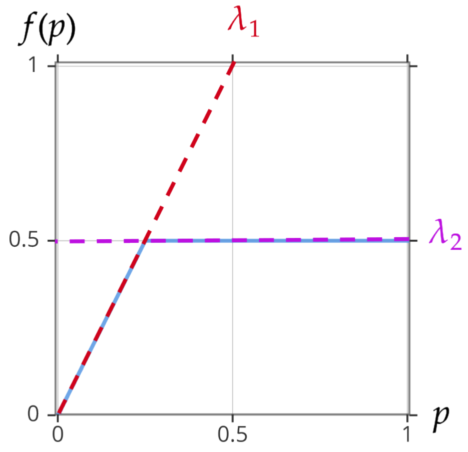
$f(p) = min(2p, 0.5)$



$$\lambda_1(p) = 2p$$
$$\lambda_2(p) = 0.5$$

Beispiel: expansive Funktion

$f(p) = min(2p, 0.5)$



$$\lambda_1(p) = 2p$$ expansiv!

$$\lambda_2(p) = 0.5$$

wesentliche Komponente

wesentliche Komponente

Eine Komponente λ von f heißt *wesentlich*, falls ein n-Dimensionaler Teilraum D existiert, sodass $f_{|D} = \lambda_{|D}$

Evaluationsfunktionen von nichtexpansiven Formeln aus Ł

Sei ϕ eine nichtexpansive Formel aus Ł mit n verschiedenen Variablen. Die Evaluationsfunktion $f : \mathbf{R}^n \to [0,1]$ von ϕ hat die Form

1. f ist stetig
2. es gibt eine endliche Anzahl unterschiedlicher affin linearer Funktionen (*Komponenten*) $\lambda_1, ..., \lambda_\mu$.
   Alle wesentlichen Komponenten haben die Form $\lambda_j = b_j + m_j x_p$ mit $b_j \in \mathbb{R}, m_j \in \{-1, 0, 1\}$
   $\forall x \in [0,1]^n . \exists j \in 1, .., \mu . f(x) = \lambda(x)$

- $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ im weiteren von dieser Form
- Komponenten hängen nur von einer Dimension ab

$\to$ *Komponentendimension*

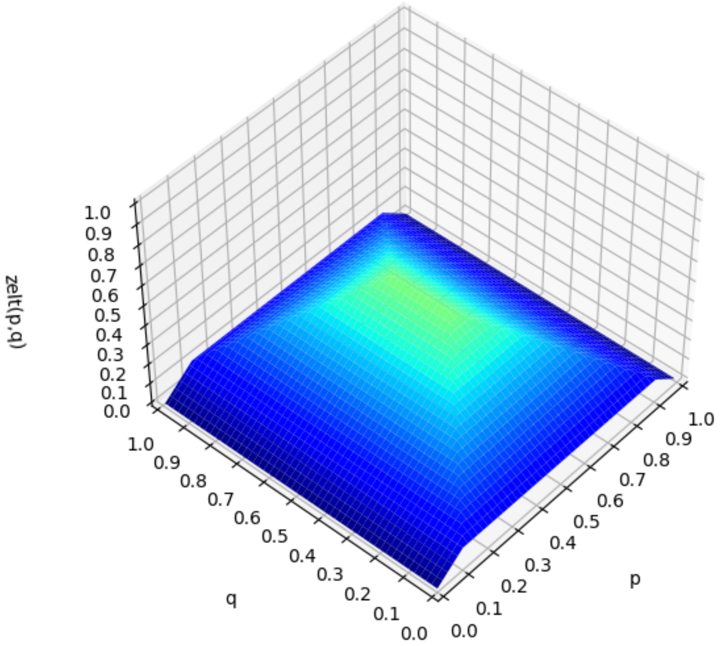
Trennlinien

Definition Trennlinie

Seien λ_i, λ_j zwei Komponenten von f.
$\pi_{ij} = \{x \in \mathbb{R}^n | \lambda_i(x) = \lambda_j(x)\}$ heißt Trennlinie von f.

- Trennlinien sind entweder die leere Menge oder $n-1$-Dimensional
- der n-dimensionale Definitionsbereich von f kann über die Trennlinien in endlich viele n-Dimensionale Bereiche $D_1, ..., D_s$ aufgeteilt werden.
- ein Bereich D ist konvex und abgeschlossen
- für jeden Bereich D gibt es genau eine Komponente λ für die gilt $f_{|D} = \lambda_{|D}$.
  - wir nennen λ die *Bereichskomponente* von D
  - Indizierung über die Bereiche ($\lambda = \lambda_D$)
  - die *Bereichskomponentendimension* von D ist die Dimension von λ_D

Beispiel: Trennlinien



$$\lambda_1(p,q) = p$$
$$\lambda_2(p,q) = 1 - p$$
$$\lambda_3(p,q) = 0.1 + q$$
$$\lambda_4(p,q) = 0.9 - q$$

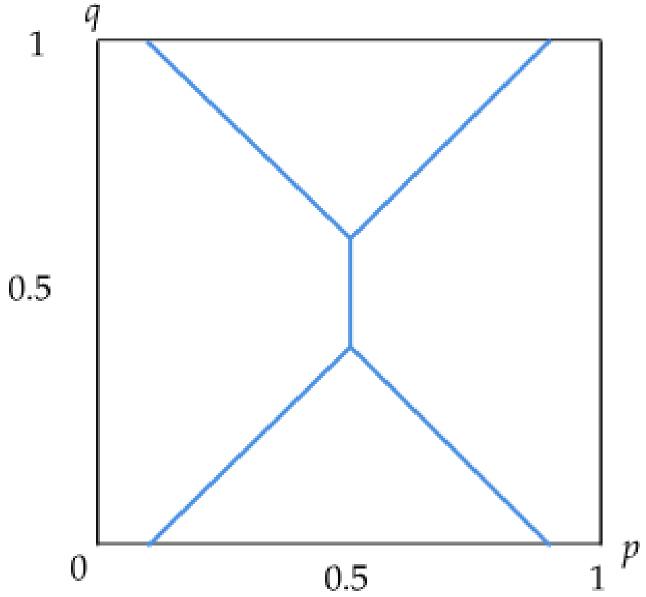
Trennlinie π_{12}:

$$\pi_{12} = \left\{ \begin{pmatrix} 0.5 \\ q \end{pmatrix} | q \in \mathbb{R} \right\}$$

Trennlinie π_{13}:

$$\pi_{13} = \{ x \in \mathbb{R}^n | x_1 = 0.1 + x_2 \}$$

Beispiel: Trennlinien



$$\lambda_1(p,q) = p$$
$$\lambda_2(p,q) = 1 - p$$
$$\lambda_3(p,q) = 0.1 + q$$
$$\lambda_4(p,q) = 0.9 - q$$

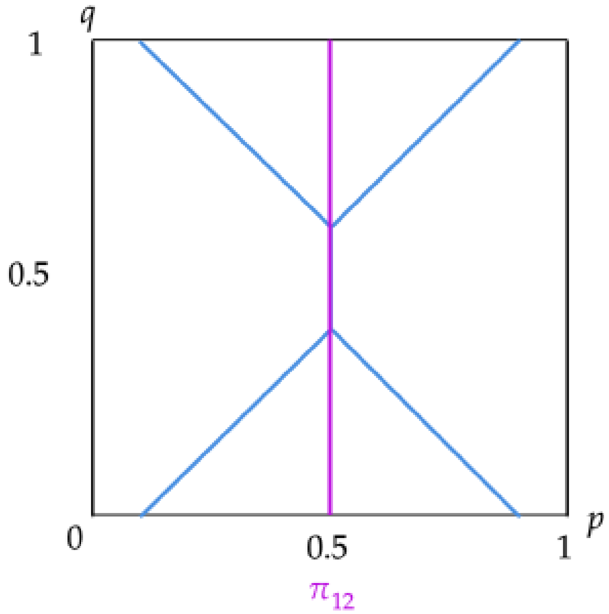
Trennlinie π_{12}:

$$\pi_{12} = \left\{ \begin{pmatrix} 0.5 \\ q \end{pmatrix} | q \in \mathbb{R} \right\}$$

Trennlinie π_{13}:

$$\pi_{13} = \{x \in \mathbb{R}^n | x_1 = 0.1 + x_2\}$$

Beispiel: Trennlinien



$$\lambda_1(p,q) = p$$
$$\lambda_2(p,q) = 1 - p$$
$$\lambda_3(p,q) = 0.1 + q$$
$$\lambda_4(p,q) = 0.9 - q$$

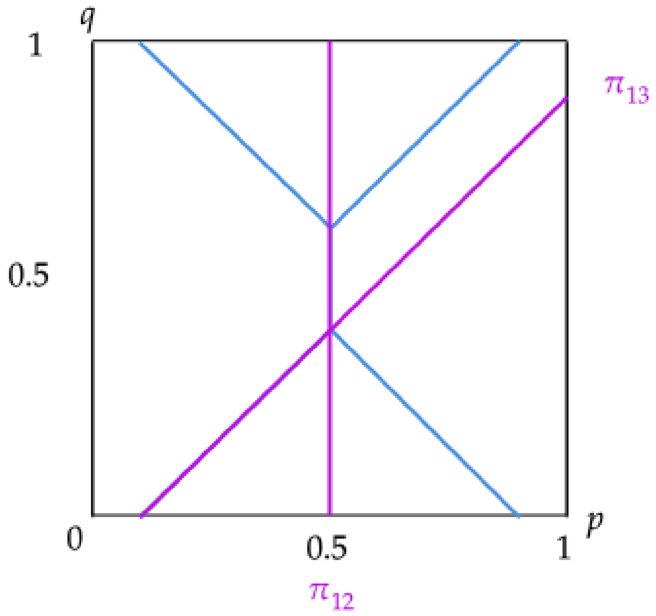
Trennlinie π_{12}:

$$\pi_{12} = \left\{ \begin{pmatrix} 0.5 \\ q \end{pmatrix} | q \in \mathbb{R} \right\}$$

Trennlinie π_{13}:

$$\pi_{13} = \{x \in \mathbb{R}^n | x_1 = 0.1 + x_2\}$$

Beispiel: Trennlinien



$$\lambda_1(p,q) = p$$
$$\lambda_2(p,q) = 1 - p$$
$$\lambda_3(p,q) = 0.1 + q$$
$$\lambda_4(p,q) = 0.9 - q$$

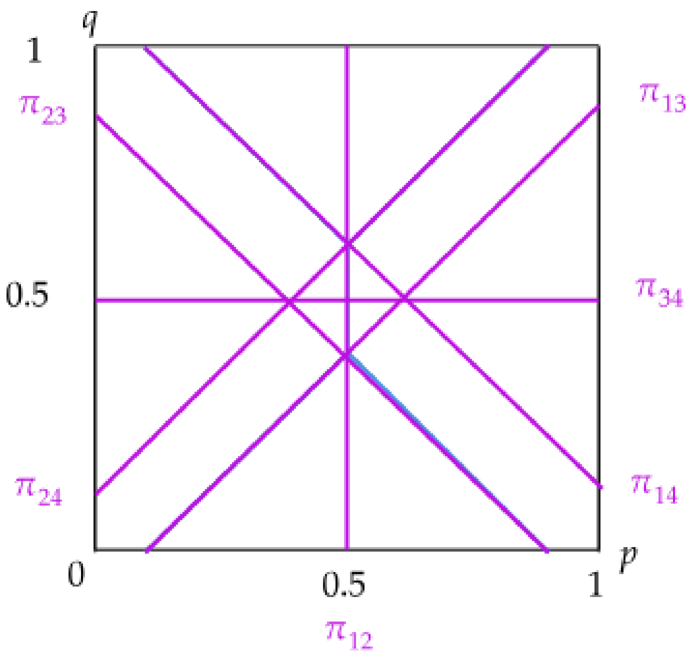
Trennlinie π_{12}:

$$\pi_{12} = \left\{ \begin{pmatrix} 0.5 \\ q \end{pmatrix} | q \in \mathbb{R} \right\}$$

Trennlinie π_{13}:

$$\pi_{13} = \{x \in \mathbb{R}^n | x_1 = 0.1 + x_2\}$$

Beispiel: Trennlinien



$\lambda_1(p,q) = p$
$\lambda_2(p,q) = 1 - p$
$\lambda_3(p,q) = 0.1 + q$
$\lambda_4(p,q) = 0.9 - q$

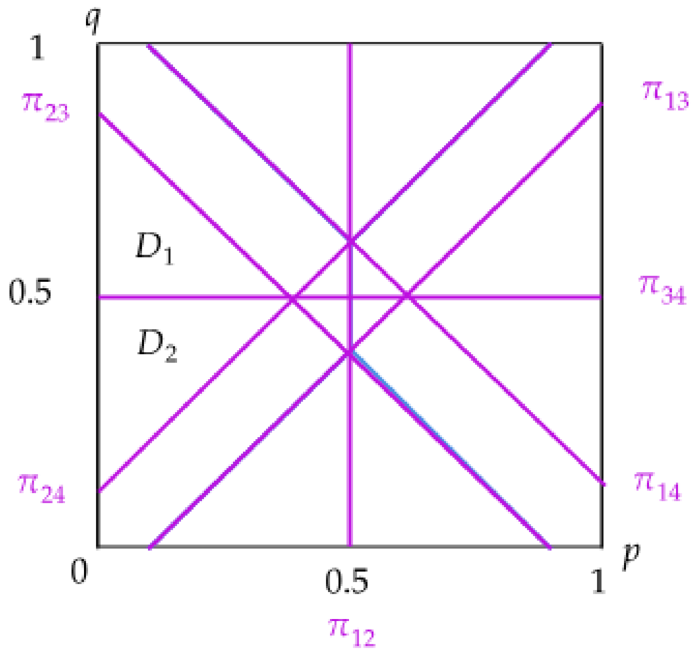
Trennlinie π_{12}:

$$\pi_{12} = \left\{ \begin{pmatrix} 0.5 \\ q \end{pmatrix} | q \in \mathbb{R} \right\}$$

Trennlinie π_{13}:

$$\pi_{13} = \{x \in \mathbb{R}^n | x_1 = 0.1 + x_2\}$$

Beispiel: Trennlinien



$$\lambda_1(p,q) = p$$
$$\lambda_2(p,q) = 1 - p$$
$$\lambda_3(p,q) = 0.1 + q$$
$$\lambda_4(p,q) = 0.9 - q$$

Trennlinie π_{12}:

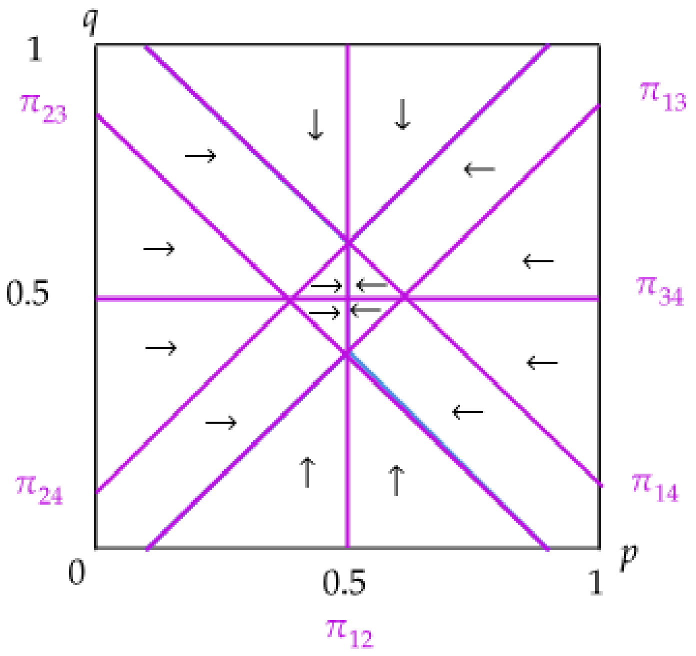
$$\pi_{12} = \left\{ \begin{pmatrix} 0.5 \\ q \end{pmatrix} | q \in \mathbb{R} \right\}$$

Trennlinie π_{13}:

$$\pi_{13} = \{x \in \mathbb{R}^n | x_1 = 0.1 + x_2\}$$

$$\lambda_{D_1} = \lambda_{D_2} = \lambda_1$$

Beispiel: Trennlinien



$$\lambda_1(p,q) = p$$
$$\lambda_2(p,q) = 1 - p$$
$$\lambda_3(p,q) = 0.1 + q$$
$$\lambda_4(p,q) = 0.9 - q$$

Trennlinie π_{12}:

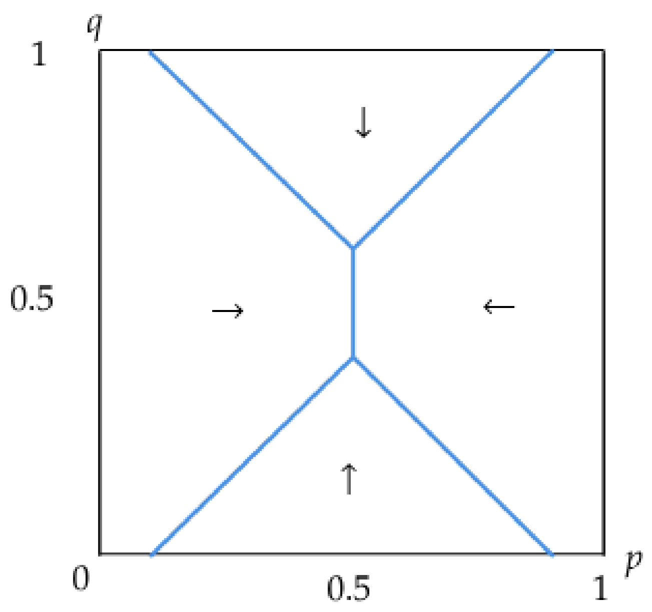
$$\pi_{12} = \left\{ \begin{pmatrix} 0.5 \\ q \end{pmatrix} | q \in \mathbb{R} \right\}$$

Trennlinie π_{13}:

$$\pi_{13} = \{x \in \mathbb{R}^n | x_1 = 0.1 + x_2\}$$

$$\lambda_{D_1} = \lambda_{D_2} = \lambda_1$$

Beispiel: Trennlinien



$$\lambda_1(p,q) = p$$
$$\lambda_2(p,q) = 1 - p$$
$$\lambda_3(p,q) = 0.1 + q$$
$$\lambda_4(p,q) = 0.9 - q$$

Trennlinie π_{12}:

$$\pi_{12} = \left\{ \begin{pmatrix} 0.5 \\ q \end{pmatrix} | q \in \mathbb{R} \right\}$$

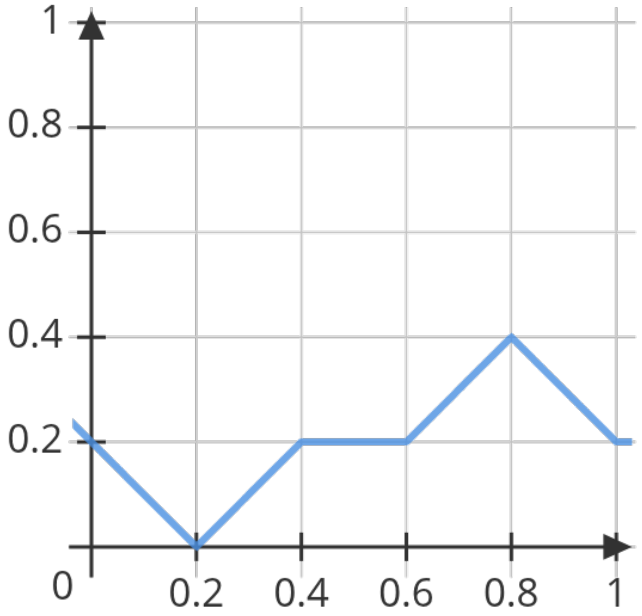
Trennlinie π_{13}:

$$\pi_{13} = \{x \in \mathbb{R}^n | x_1 = 0.1 + x_2\}$$

$$\lambda_{D_1} = \lambda_{D_2} = \lambda_1$$

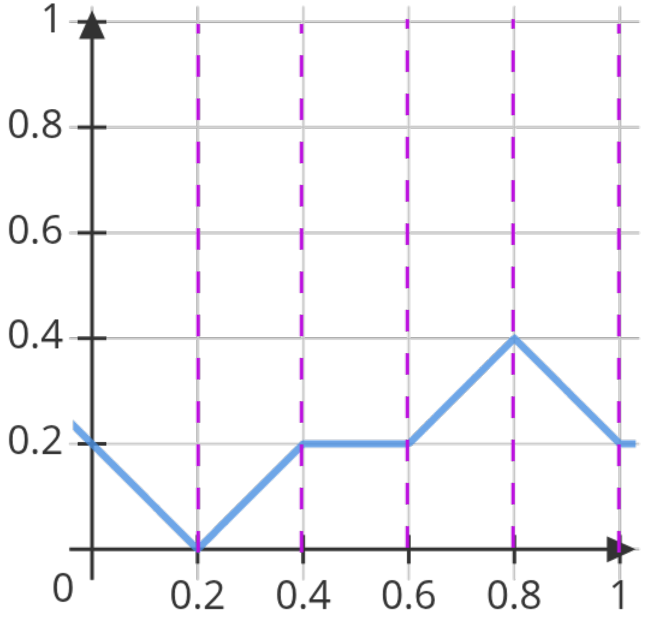
Beweisidee

- zu zeigen: Jede Funktion f ist Evaluationsfunktion einer Formel aus Nonexpansive fuzzy ALC.
- $\mu_D(x) = sup_{D \cap [0,1]^n} f \bigwedge_{D' \in U_D} \lambda_{D'}(x)$
- $D' \in U_D \Leftrightarrow \forall x \in D.\lambda_{D'}(x) \geq \lambda_D(x)$
- $D \in U_D$



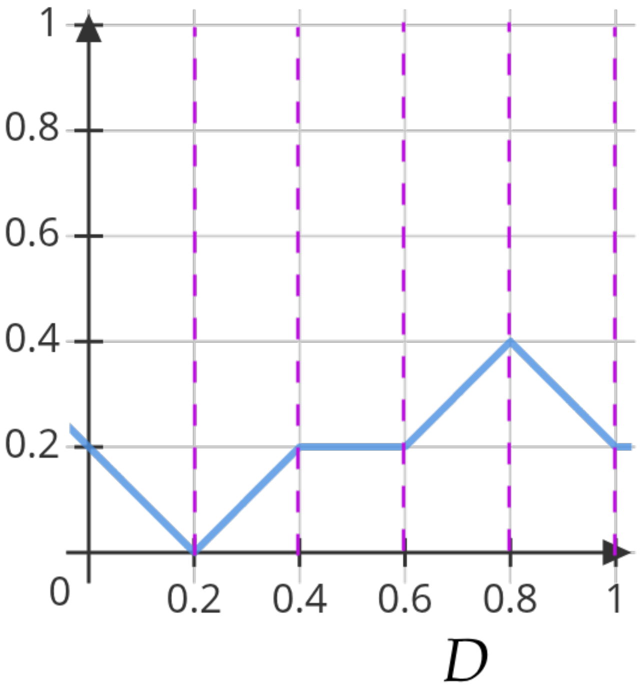
Beweisidee

- zu zeigen: Jede Funktion f ist Evaluationsfunktion einer Formel aus Nonexpansive fuzzy ALC.
- $\mu_D(x) = sup_{D \cap [0,1]^n} f \bigwedge_{D' \in U_D} \lambda_{D'}(x)$
- $D' \in U_D \Leftrightarrow \forall x \in D. \lambda_{D'}(x) \geq \lambda_D(x)$
- $D \in U_D$



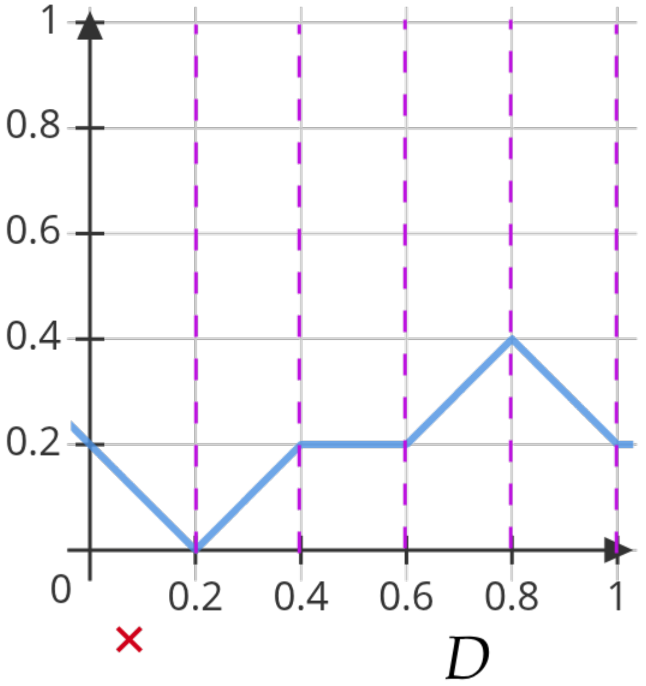
Beweisidee

- zu zeigen: Jede Funktion f ist Evaluationsfunktion einer Formel aus Nonexpansive fuzzy ALC.
- $\mu_D(x) = sup_{D \cap [0,1]^n} f \bigwedge_{D' \in U_D} \lambda_{D'}(x)$
- $D' \in U_D \Leftrightarrow \forall x \in D. \lambda_{D'}(x) \geq \lambda_D(x)$
- $D \in U_D$



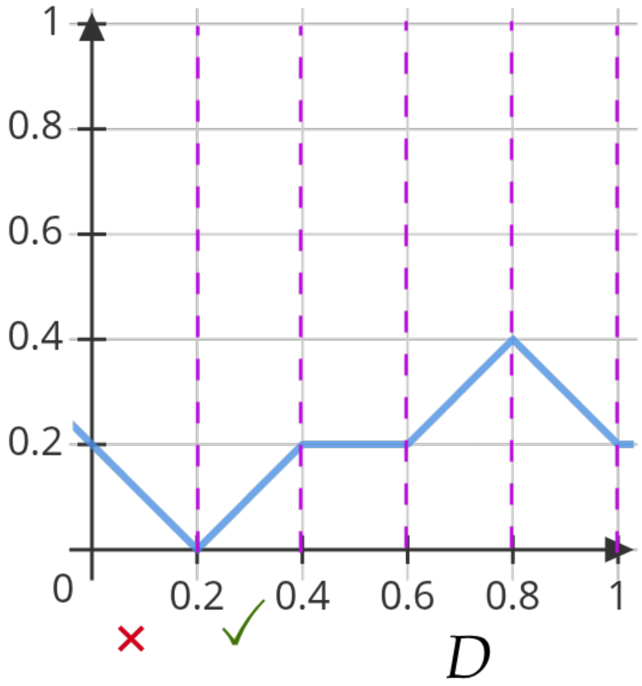
Beweisidee

- zu zeigen: Jede Funktion f ist Evaluationsfunktion einer Formel aus Nonexpansive fuzzy ALC.
- $\mu_D(x) = sup_{D\cap[0,1]^n} f \bigwedge_{D'\in U_D} \lambda_{D'}(x)$
- $D' \in U_D \Leftrightarrow \forall x \in D.\lambda_{D'}(x) \geq \lambda_D(x)$
- $D \in U_D$



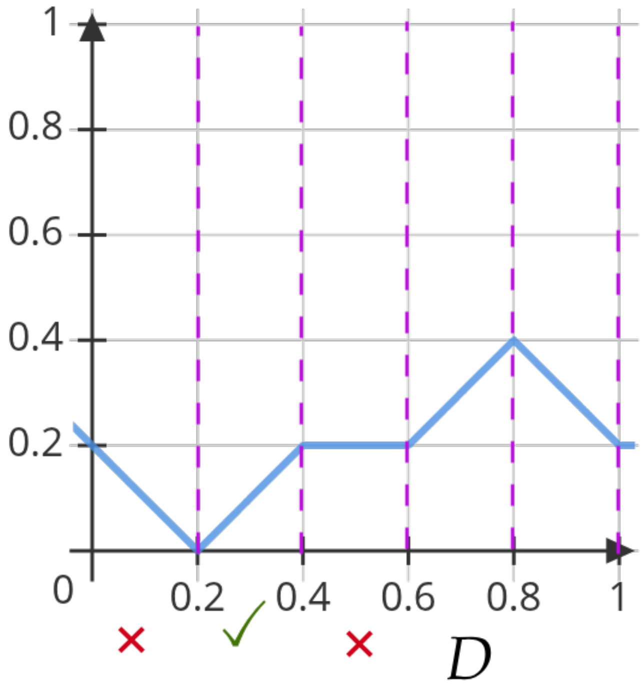
Beweisidee

- zu zeigen: Jede Funktion f ist Evaluationsfunktion einer Formel aus Nonexpansive fuzzy ALC.
- $\mu_D(x) = sup_{D \cap [0,1]^n} f \bigwedge_{D' \in U_D} \lambda_{D'}(x)$
- $D' \in U_D \Leftrightarrow \forall x \in D . \lambda_{D'}(x) \geq \lambda_D(x)$
- $D \in U_D$



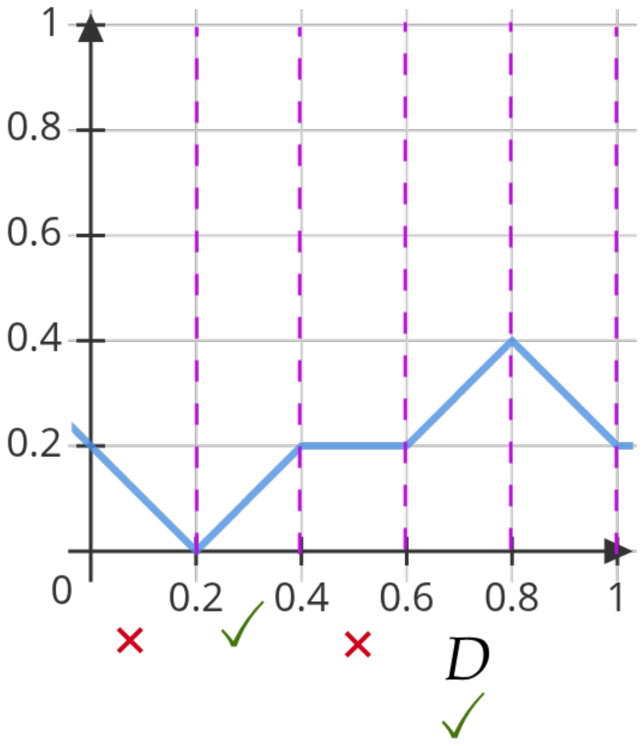
Beweisidee

- zu zeigen: Jede Funktion f ist Evaluationsfunktion einer Formel aus Nonexpansive fuzzy ALC.
- $\mu_D(x) = sup_{D \cap [0,1]^n} f \bigwedge_{D' \in U_D} \lambda_{D'}(x)$
- $D' \in U_D \Leftrightarrow \forall x \in D . \lambda_{D'}(x) \geq \lambda_D(x)$
- $D \in U_D$



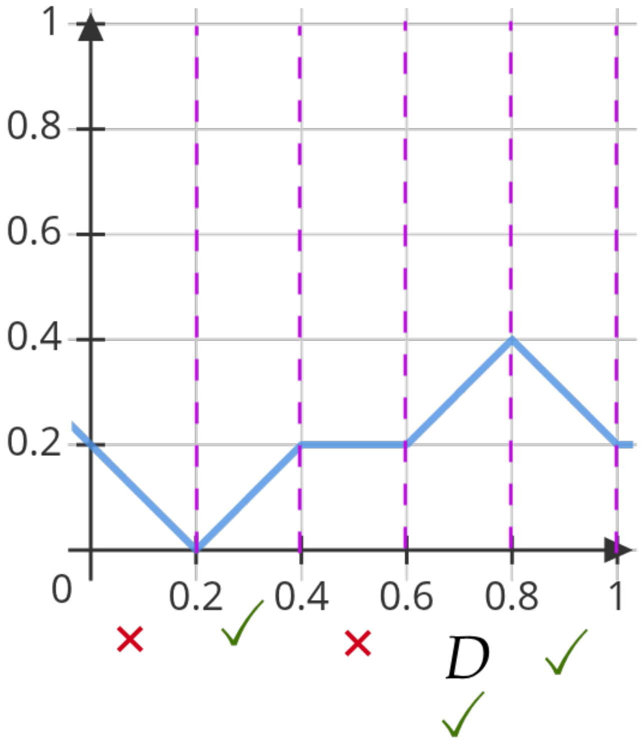
Beweisidee

- zu zeigen: Jede Funktion f ist Evaluationsfunktion einer Formel aus Nonexpansive fuzzy ALC.
- $\mu_D(x) = sup_{D \cap [0,1]^n} f \bigwedge_{D' \in U_D} \lambda_{D'}(x)$
- $D' \in U_D \Leftrightarrow \forall x \in D . \lambda_{D'}(x) \geq \lambda_D(x)$
- $D \in U_D$



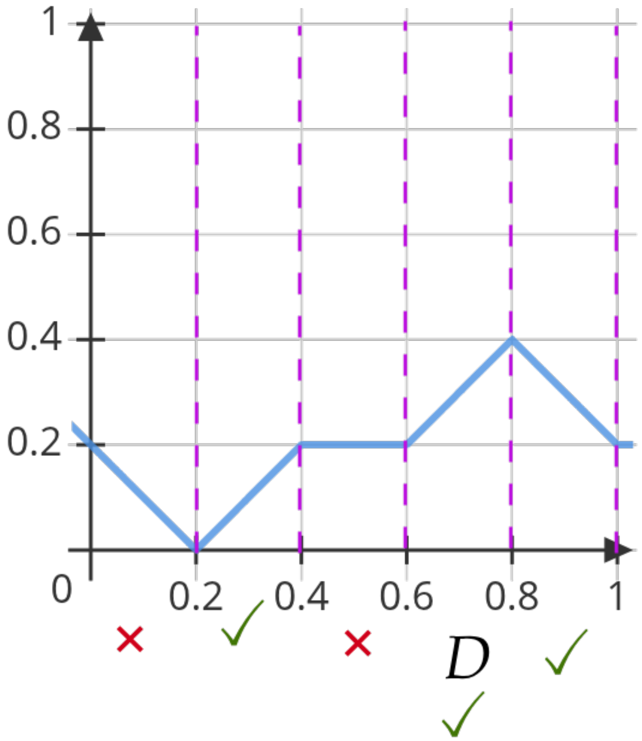
Beweisidee

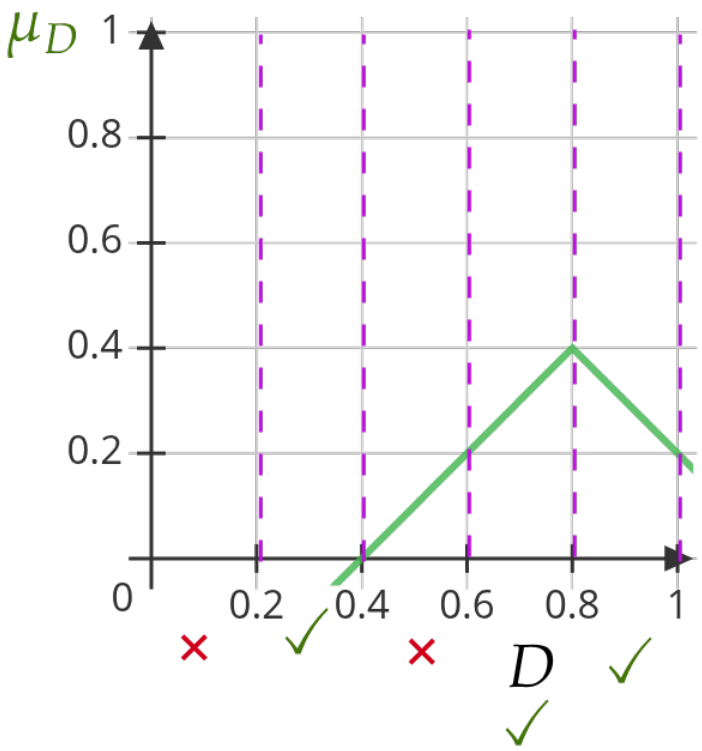
- zu zeigen: Jede Funktion f ist Evaluationsfunktion einer Formel aus Nonexpansive fuzzy ALC.
- $\mu_D(x) = sup_{D \cap [0,1]^n} f \bigwedge_{D' \in U_D} \lambda_{D'}(x)$
- $D' \in U_D \Leftrightarrow \forall x \in D. \lambda_{D'}(x) \geq \lambda_D(x)$
- $D \in U_D$



Beweisidee

- zu zeigen: Jede Funktion f ist Evaluationsfunktion einer Formel aus Nonexpansive fuzzy ALC.
- $\mu_D(x) = sup_{D \cap [0,1]^n} f \bigwedge_{D' \in U_D} \lambda_{D'}(x)$
- $D' \in U_D \Leftrightarrow \forall x \in D . \lambda_{D'}(x) \geq \lambda_D(x)$
- $D \in U_D$





Lemma

Sei D ein Bereich von f.
$\forall x \in [0,1]^n . f(x) \leq \mu_D(x)$
$\forall x \in D . f(x) = \mu_D(x)$

Lemma

$f = \bigvee_{i \in \{1,\ldots,s\}} \mu_{D_i}$

- Komponenten sind in Nonexpansive fuzzy ALC ausdrückbar
- Minimum in Nonexpansive fuzzy ALC ausdrückbar

$\rightarrow$ μ_D ausdrückbar

- Maximum in Nonexpansive fuzzy ALC ausdrückbar

$\rightarrow$ f ausdrückbar

Future Work

Erweiterung auf Modallogik

References

References

[GSW25] S. Gebhart, L. Schröder, and P. Wild. *Non-expansive Fuzzy ALC*. 2025.

[McN51] R. McNaughton. “A Theorem About Infinite-Valued Sentential Logic”. In: *Journal of Symbolic Logic* 16.1 (1951), pp. 1–13. DOI: 10.2307/2268660.

[Wil+18] P. Wild, L. Schröder, D. Pattinson, and B. König. “A van Benthem Theorem for Fuzzy Modal Logic”. In: *Proceedings of the 33rd Annual ACM/IEEE Symposium on Logic in Computer Science*. LICS ’18. Oxford, United Kingdom: Association for Computing Machinery, 2018, pp. 909–918. DOI: 10.1145/3209108.3209180.

Fragen?