Nominal Sets · Übungsblatt 10

Besprechung: 9. Juli 2024

Thorsten Wißmann, Informatik 8, FAU Erlangen-Nürnberg

Aufgabe A1

Definieren Sie eine Funktion $k\colon \Lambda/{=_\alpha} \to \mathbb{N}$, die die Anzahl der gebundenen Variablen in einem Term zählt, z. B. $k([(\lambda a.\lambda b.\, a\, a)c]_\alpha) = 1$ (nämlich das a). Geben Sie hierfür eine Algebra für den Funktor $GX = \mathbb{A} + [\mathbb{A}]X + X \times X$ mit Träger $\mathbb{N} \times Z$ an, wobei Z eine geeignete nominale Menge ist. Es genügt, eine Algebra anzugeben (ohne Beweis).

Aufgabe A2

Zeigen Sie, dass jede endliche nominale Menge diskret ist.

Aufgabe A3

(a) Zeigen Sie, dass es keinen *endlichen* deterministischen Automaten für folgende Sprache gibt, wenn Σ unendlich ist:

$$L = \{awa \mid a \in \Sigma, w \in \Sigma^*\}$$

(b) Definieren Sie je einen NOFA für folgende Sprachen mit $\Sigma = \mathbb{A}$:

$$L_1 = \{wa \mid a \in \Sigma, w \in \Sigma^*, a \notin \mathsf{supp}(w)\} \qquad L_2 = \{wavau \mid w, v, u \in \Sigma^*, a \in \Sigma\}$$

Die Sprache eines nominalen Automaten erhält man, wenn man den nominalen Automaten als gewöhnlichen unendlichen nichtderministischen Automaten betrachtet. Eine explizite Definition ist im Skript unter Definition 7.5.

Aufgabe A4 (Verlängerte Bearbeitungszeit: Besprechung am 16. Juli 2024)

Definition. Zwei surjektive äquivariante Abbildungen $q\colon X \to Q$ und $p\colon X \to P$ sind *isomorph*, wenn es einen Isomorphismus $f\colon Q \to P$ mit $p = f \circ q$ gibt.

Zeigen Sie, dass $\mathbb{A}^{\#n}$ (bis auf Isomorphismus) nur endliche viele Quotienten hat, indem Sie folgende Teilschritte vervollständigen:

(a) Überprüfen Sie, dass die Quotienten $\mathsf{pr}_1\colon \mathbb{A}^{\#2} \to \mathbb{A}$ und $\mathsf{pr}_2\colon \mathbb{A}^{\#2} \to \mathbb{A}$ nicht isomorph sind.

(b) Konstruieren Sie für einen gegebenen Quotienten $q\colon \mathbb{A}^{\#n} \to Q$ eine Menge $S_q \subseteq n$ (wobei $n = \{0, \dots, n-1\}$), sodass

$$\mathsf{supp}_Q(q(t)) = t[S_q] \quad \text{für alle } t\colon n \rightarrowtail \mathbb{A}$$

Wir nutzen, dass $t \in \mathbb{A}^{\#n}$ genau die injektiven Abbildungen $t\colon n \rightarrowtail \mathbb{A}$ sind (vgl. Blatt 4).

(c) Konstruieren Sie für einen gegebenen Quotienten $q\colon \mathbb{A}^{\#n} \to Q$ eine Untergruppe G_q von $\mathfrak{S}_{\mathsf{f}}(S_q)$ mit der Eigenschaft, dass

$$f(t) = f(t') \quad\iff\quad \exists g \in G_q\colon t' = t \circ g$$

(d) Zeigen Sie, dass zwei Quotienten $q\colon X \to Q$ und $p\colon X \to P$ genau dann isomorph sind, wenn $S_q = S_p$ und $G_q = G_p$.

Übungsblatt 9: A2(a) und A3