Nominal Sets · Übungsblatt 9

Besprechung: 2. Juli 2024 Thorsten Wißmann, Informatik 8, FAU Erlangen-Nürnberg

Aufgabe A1

Charakterisieren Sie, wie sich der zu $[\mathbb{A}]$ rechtsadjungierte Funktor R auf Morphismen verhält.

Betrachten Sie hierfür eine äquivariante Abbildung $f\colon X \to Y$, definieren Sie

$$Rf\colon RX \to RY,$$

und überprüfen Sie, dass $Rf(g) \in RY$ für alle $g \in RZ$ und dass für Ihre Definition von Rf das gewünschte Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd}
{[\mathbb{A}]RX} \arrow[r, "{[\mathbb{A}](Rf)}"] \arrow[d, "\epsilon_X"'] & {[\mathbb{A}]RY} \arrow[d, "\epsilon_Y"] \\
X \arrow[r, "f"] & Y
\end{tikzcd}$$

Aufgabe A2

(a) Gibt es eine orbit-endliche nominale Menge X, sodass es ein $M \in \mathcal{P}_{\mathsf{fs}}(X)$ gibt, das weder endlich noch koendlich ist?

(b) Zeigen Sie, dass für alle $M \in \mathcal{P}_{\mathsf{fs}}(\mathcal{P}_{\mathsf{fs}}(X))$ die große Vereinigung $\bigcup M \in \mathcal{P}(X)$ wieder endlichen Support hat. (Tipp 1)

Aufgabe A3 (Verlängerte Bearbeitungszeit: Besprechung am 9. Juli 2024)

Eine Teilmenge $M \subseteq X$ hat uniformen Support (*uniformly finitely supported*, ufs), wenn es eine *endliche* Menge $S \subseteq \mathbb{A}$ gibt, die Support von jedem Element $x \in M$ ist.

Wir definieren

$$\mathcal{P}_{\mathsf{ufs}}(X) = \{M \subseteq X \mid M \text{ hat uniformen Support}\}$$

Offensichtlich gilt $\mathcal{P}_{\mathsf{f}}X \subseteq \mathcal{P}_{\mathsf{ufs}}X \subseteq \mathcal{P}_{\mathsf{fs}}X$ für alle nominalen Mengen X.

(a) Zeigen Sie: $M \subseteq X$ ist ufs, gdw. $\bigcup_{x \in M} \mathsf{supp}(x)$ endlich ist.

(b) Finden Sie X mit $\mathcal{P}_{\mathsf{ufs}}X \neq \mathcal{P}_{\mathsf{fs}}X$.

(c) Finden Sie X mit $\mathcal{P}_{\mathsf{f}}X \neq \mathcal{P}_{\mathsf{ufs}}X$.

(d) Zeigen Sie, dass $\mathcal{P}_{\mathsf{f}}X = \mathcal{P}_{\mathsf{ufs}}X$ für orbit-endliche nominale Mengen X.

(e) Folgt aus $\mathcal{P}_{\mathsf{f}}X = \mathcal{P}_{\mathsf{ufs}}X$, dass X orbit-endlich ist?

Tipp 1: Verifizieren Sie, dass $\bigcup\colon \mathcal{P}_{\mathsf{fs}}(\mathcal{P}_{\mathsf{fs}}(X)) \to \mathcal{P}(X)$ äquivariant ist.