Nominal Sets · Übungsblatt 7

Besprechung: 11. Juni 2024

Thorsten Wißmann, Informatik 8, FAU Erlangen-Nürnberg

Aufgabe A1

Ein Morphismus $e\colon X \to Y$ (in einer Kategorie $\mathcal{C}$) heißt *episch* (oder e ist ein *Epimorphismus*), wenn für alle $f, g\colon Y \to Z$ mit $f \cdot e = g \cdot e$ folgt dass $f = g$. Mit anderen Worten, e ist episch, wenn $\mathcal{C}(e, -)\colon \mathcal{C}(Y, Z) \to \mathcal{C}(X, Z)$ injektiv ist.

(a) Wiederholen Sie den Beweis, dass die Epimorphismen in Set genau die surjektiven Abbildungen sind.

(b) Zeigen Sie, dass die Epimorphismen in Nom genau die surjektiven, äquivarianten Abbildungen sind (Tipp 1).

(c) Zeigen Sie, dass linksadjungierte Funktoren Epimorphismen erhalten. (Also wenn ein Funktor $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ linksadjungiert ist, dann ist für jeden Epimorphismus $e\colon X \to Y$ auch $Fe\colon FX \to FY$ ein Epimorphismus.)

Aufgabe A2 (Proposition 4.41)

Zeigen Sie, dass $\sim_\alpha$ für beliebige nominalen Mengen X eine äquivariante Äquivalenzrelation auf $\mathbb{A} \times X$ ist.

Aufgabe A3 (Lemma 5.4)

Vervollständigen Sie den Beweis von Lemma 5.4 für Funktoren $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ und $G\colon \mathcal{D} \to \mathcal{C}$:

(a) Sei ein natürlicher Isomorphismus $\phi_{X,Y}\colon \mathcal{D}(FX, Y) \to \mathcal{C}(X, GY)$ gegeben. Zeigen Sie, dass für $f\colon X \to GY$ und $h\colon FX \to Y$ gilt:

$$f = Gh \circ \phi_{X,FX}(\mathrm{id}_{FX}) \qquad \Longleftrightarrow \qquad h = \phi^{-1}_{X,Y}(f)$$

(b) Sei $\eta\colon \mathrm{Id}_{\mathcal{C}} \to GF$ mit der universellen Eigenschaft in Lemma 5.4 gegeben. Zeigen Sie, dass

$$\phi_{X,Y}(h) := Gh \circ \eta_X \qquad \phi_{X,Y}\colon \mathcal{D}(FX, Y) \to \mathcal{C}(X, GY)$$

eine natürliche Transformation ist und dass jedes $\phi_{X,Y}$ bijektiv ist.

Aufgabe A4 (Proposition 5.6)

(a) Zeigen Sie, dass zwei Funktoren $F, F'\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ genau dann natürlich Isomorph sind ($F \cong F'$), wenn es eine natürliche Bijektion zwischen $\mathcal{D}(D, FC)$ und $\mathcal{D}(D, F'C)$ (natürlich in $C \in \mathcal{C}$ und $D \in \mathcal{D}$) gibt.

(b) Zeigen Sie, dass adjungierte Funktoren eindeutig bis auf natürlichen Isomorphismus sind: Für Adjunktionen $F \dashv G$ und $F' \dashv G$ gilt $F \cong F'$.

Tipp 1: Wählen Sie in der einen Richtung für f die Abbildung χ