Nominal Sets · Übungsblatt 5

Besprechung: 28. Mai 2024

Thorsten Wißmann, Informatik 8, FAU Erlangen-Nürnberg

Aufgabe A1

Sei X eine nominale Menge.

(a) Zeigen Sie: eine Menge $S \subseteq \mathbb{A}$ ist genau dann ein Support von $M \in \mathcal{P}X$, wenn

$$\text{für alle } \pi \in \mathsf{Fix}(S) \text{ gilt: } \pi \cdot M \subseteq M.$$

(b) Zeigen Sie, dass

$$f\colon (\mathcal{P}_\mathsf{f} X, \cdot) \to (\mathcal{P}_\mathsf{f}\mathbb{A}, \cdot) \qquad f(M) = \bigcup\{\mathsf{supp}(x) \mid x \in M\}$$

äquivariant ist.

(c) Folgern Sie daraus, dass $\mathsf{supp}_{\mathcal{P}_\mathsf{f}}(M) = f(M)$ für alle $M \in \mathcal{P}_\mathsf{f}(X)$.

Aufgabe A2

Betrachten Sie folgende alternative Definition des kleinsten endlichen Supports:

$$s\colon X \to \mathcal{P}\mathbb{A} \qquad s(x) = \{a \in \mathbb{A} \mid \{b \in \mathbb{A} \mid (a\ \ b) \cdot x \neq x\} \text{ ist unendlich}\}$$

Zeigen Sie: $\mathsf{supp}(x) = s(x)$ für alle x in einer nominalen Menge $(X, \cdot)$.

Aufgabe A3 (Lemma 4.22)

Sei $f\colon (X, \cdot) \rightarrowtail (Y, \cdot)$ eine äquivariante Injektion in eine nominale Menge $(Y, \cdot)$. Zeigen Sie, dass $S \subseteq \mathbb{A}$ genau dann ein Support von x ist, wenn S ein Support von $f(x)$ ist.

Aufgabe A4

(a) Für jede bijektive Abbildung $\pi \in \mathsf{Sym}(\mathbb{A})$ und endliche Menge $S \subseteq \mathbb{A}$ gibt es eine endliche Permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_\mathsf{f}(\mathbb{A})$ mit $\pi(a) = \sigma(a)$ für alle $a \in S$.

(b) Zeigen Sie: jede nominale Menge $(X, \cdot)$ lässt sich auf eindeutige Weise zu einer Gruppenoperation $(X, \cdot_\infty)$ für $\mathsf{Sym}(\mathbb{A})$ erweitern (Tipp 1), sodass für alle $\pi \in \mathfrak{S}_\mathsf{f}(\mathbb{A})$ gilt:

$$\pi \cdot_\infty x = \pi \cdot x$$

Aufgabe A5

Ein Morphismus $m\colon Y \to Z$ (in einer Kategorie $\mathcal{C}$) heißt *monisch* (oder m ist ein *Monomorphismus*), wenn für alle $f, g\colon X \to Y$ mit $m \cdot f = m \cdot g$ folgt dass $f = g$. Mit anderen Worten, m ist monisch wenn $\mathcal{C}(-, m)\colon \mathcal{C}(Y, Z) \to \mathcal{C}(X, Z)$ injektiv ist.

(a) Wiederholen Sie den Beweis, dass die Monomorphismen in Set genau die injektiven Abbildungen sind.

(b) Zeigen Sie, dass die Monomorphismen in Nom genau die injektiven, äquivarianten Abbildungen sind (Tipp 2).

Tipp 1: Nutzen Sie Lemma 4.18
Tipp 2: Wählen Sie in der einen Richtung für X eine passende Untermenge von Y^2