# Nominal Sets · Übungsblatt 3

Besprechung: 7. Mai 2024

Thorsten Wißmann, Informatik 8, FAU Erlangen-Nürnberg

## **Aufgabe A1** (Theorem 3.13)

Zeigen Sie, dass die Kategorien $G$-$\mathsf{Set}$ und $[G, \mathsf{Set}]$ isomorph sind:

(a) Definieren Sie einen Funktor $F\colon G\text{-}\mathsf{Set} \to [G, \mathsf{Set}]$.

(b) Definieren Sie einen Funktor $H\colon [G, \mathsf{Set}] \to G\text{-}\mathsf{Set}$.

(c) Verifizieren Sie $H \circ F = \mathrm{Id}_{G\text{-}\mathsf{Set}}$

(d) Verifizieren Sie $F \circ H = \mathrm{Id}_{[G,\mathsf{Set}]}$

## **Aufgabe A2** (Freies $G$-Set)

Sei $U\colon G\text{-}\mathsf{Set} \to \mathsf{Set}$ der Vergissfunktor aus Beispiel 3.7.(a). Definieren Sie einen Funktor (Tipp 1)

$$F\colon \mathsf{Set} \to G\text{-}\mathsf{Set},$$

der alle der folgenden Eigenschaften erfüllt:

(a) Es gibt eine natürliche Transformation $\eta\colon \mathrm{Id}_{\mathsf{Set}} \to UF$.

(b) Für jede Menge $X \in \mathsf{Set}$, Gruppenoperation $(Y, \cdot)$ und Abbildung $f\colon X \to U(Y, \cdot)$ (also $f\colon X \to Y$) gibt es *genau* eine äquivariante Abbildung $h\colon FX \to (Y, \cdot)$ mit $Uh \cdot \eta_X = f$:

$$\begin{tikzcd} FX \arrow[r, dashed, "\exists!\, h"] & (Y,\cdot) \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} UFX \arrow[r, "Uh"] & U(Y,\cdot) \\ X \arrow[u, "\eta_X"] \arrow[ur, "f"'] & \end{tikzcd}$$

*Hinweis:* Nutzen Sie Lemma 2.19 für das Verifizieren der Eindeutigkeit.

## **Aufgabe A3** ($\mathsf{Set} \subseteq G$-$\mathsf{Set}$)

Betrachten Sie den Funktor $D\colon \mathsf{Set} \to G\text{-}\mathsf{Set}$ definiert durch:

$$DX = (X, \cdot) \text{ mit } \pi \cdot x = x \text{ für alle } \pi \in G \text{ und } x \in X$$

und $D(f) = f$ für Abbildungen $f\colon X \to Y$. Definieren Sie einen Funktor (Tipp 2)

$$V\colon G\text{-}\mathsf{Set} \to \mathsf{Set},$$

der alle der folgenden Eigenschaften erfüllt:

(a) Es gibt eine natürliche Transformation $\alpha\colon \mathrm{Id}_{G\text{-}\mathsf{Set}} \to DV$.

(b) Es gibt eine natürliche Transformation $\beta\colon VD \to \mathrm{Id}_{\mathsf{Set}}$.

## **Aufgabe A4** (optional: A2 vs. A3)

Warum ist $D$ (aus A3) nicht das gesuchte $F$ in A2?
Warum ist $U$ (aus A2) nicht das gesuchte $V$ in A3?

Tipp 1: Wenn Sie $UFX = G \times X$ setzen, müssen Sie nur noch die Gruppenoperation darauf definieren.
Tipp 2: Betrachten Sie Definition 2.10