Nominal Sets · Übungsblatt 2

Besprechung: 30. April 2024

Thorsten Wißmann, Informatik 8, FAU Erlangen-Nürnberg

Definition 2.23. Für Gruppenoperationen $(X, \cdot)$ und $(Y, \cdot)$ trägt die Menge *aller* Abbildungen $X \to Y$, geschrieben Y^X, eine kanonische Gruppenoperation $(Y^X, \star)$:

$$Y^X := \{f\colon X \to Y \mid f \text{ beliebige Abbildung}\} \qquad \pi \star f \;:=\; (x \mapsto \pi \cdot f(\pi^{-1} \cdot x))$$

Aufgabe A1 (Lemma 2.24)

Beweisen Sie: Eine Abbildung $f \in (Y^X, \star)$ ist genau dann äquivariant, wenn $\mathsf{orb}(f) = \{f\}$.

Aufgabe A2

Zeigen Sie, dass für Gruppenoperationen $(X, \cdot)$, $(Y, \cdot)$, $(Z, \cdot)$ Funktionskomposition eine äquivariante Abbildung ist:

$$h\colon (Z^Y, \star) \times (Y^X, \star) \to (Z^X, \star) \qquad h(g, f) = g \circ f$$

Aufgabe A3

Verifizieren Sie für $G := \mathfrak{S}_{\mathsf{f}}(A)$ (A beliebig) und eine Gruppenoperation $(X, \cdot)$, dass folgende Abbildung äquivariant ist.

$$s\colon A \times A \times X \to X \qquad s(a, b, x) = (a \;\; b) \cdot x$$

Aufgabe A4

Betrachte $2 = \{0, 1\}$ mit der diskreten Gruppenoperation für eine allgemeine Gruppe G.

(a) Verifizieren Sie, dass es für jede Gruppenoperation $(X, \cdot)$ eine bijektive äquivariante Abbildung gibt:

$$\chi\colon (\mathcal{P}X, \cdot) \xrightarrow{\cong} 2^{(X, \cdot)}$$

(b) Eine Menge $S \in \mathcal{P}(X)$ heißt *äquivariant*, wenn $\pi \cdot S = S$. Zeigen Sie, dass die Menge S genau dann äquivariant ist, wenn die Abbildung $\chi(S)\colon (X, \cdot) \to 2$ äquivariant ist.

Aufgabe A5 (optional, falls die Zeit ausreicht)

Im Kontext von Streams schreiben wir ω für die Menge der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ mit der diskreten Gruppenoperation. Dann ist die Menge der Streams über $(Z, \cdot)$ durch das G-Set $(Z, \cdot)^\omega$ gegeben. Verifizieren Sie: für $(X, \cdot)$ und eine Familie von äquivarianten Abbildungen

$$f_k\colon (X, \cdot) \to (Z, \cdot) \qquad \text{für } k \in \mathbb{N}$$

gibt es genau eine äquivariante Abbildung $h\colon (X, \cdot) \to (Z, \cdot)^\omega$ mit $h(x)(k) = f_k(x)$ (für alle $k \in \mathbb{N}$).