Nominal Sets · Übungsblatt 1

Besprechung: 23. April 2024

Thorsten Wißmann, Informatik 8, FAU Erlangen-Nürnberg

Aufgabe A1 (Theorem 2.5)

Beweisen Sie, dass sich jede endliche Permutation $\pi \in \mathfrak{S}_{\mathsf{f}}(A)$ auf einer Menge A als Komposition von höchstens $|\mathsf{supp}(\pi)|$-vielen Transpositionen schreiben lässt. (Tipp 1)

Aufgabe A2 (Bemerkung 2.8)

(a) Zeigen Sie für eine Gruppe G, eine Menge X und eine Abbildung $h\colon G \times X \to X$, dass h genau dann eine Gruppenoperation ist, wenn

$$\bar{h}\colon G \to (X \to X) \qquad \bar{h}(g)(x) = h(g,x)$$

ein Gruppenhomomorphismus $\bar{h}\colon G \to \mathsf{Sym}(X)$ ist.

(b) Beweisen Sie Beispiel 2.9.(a) per Korollar: Für $G := \mathsf{Sym}(A)$ und $X := A$ definiert $\pi \cdot a := \pi(a)$ eine Gruppenoperation.

Aufgabe A3

Wir betrachten eine Gruppe $(G, \cdot)$ mit der Wirkung auf sich selbst: $(g,x) \mapsto g \cdot x$.

(a) Verifizieren Sie, dass $(g,x) \mapsto g \cdot x$ eine Gruppenoperation ist. (Beispiel 2.9.(c))

(b) Zeigen Sie: Wenn es eine äquivariante Abbildung $f\colon (G, \star) \to (G, \cdot)$ gibt, dann ist $G = \{e\}$.

Aufgabe A4 (Lemma 2.12)

Beweisen Sie: Eine Gruppenoperation auf X ist genau dann diskret, wenn jeder Orbit genau ein Element hat.

Aufgabe A5

Sei $G := \mathfrak{S}_{\mathsf{f}}(A)$ und A unendlich.

(a) Geben Sie alle Orbits von A^3 explizit an.

(b) Beschreiben Sie alle Orbits von A^n, $n \in \mathbb{N}$. Betrachten Sie hierfür A^n als die Menge von Abbildungen $n \to A$ und $n \in \mathbb{N}$ als Menge $n = \{0, \ldots, n-1\}$.

Aufgabe A6

Sei $G := \mathfrak{S}_{\mathsf{f}}(A)$ und A unendlich.

(a) Geben Sie alle äquivarianten Abbildungen $A \to \mathcal{P}_{\mathsf{f}}(A)$ an.

(b) Verifizieren Sie deren Äquivarianz.

(c) Beweisen Sie, dass es keine weiteren äquivarianten Abbildungen gibt.

Tipp 1: Induktion über $|\mathsf{supp}(\pi)|$