

# Übungsblatt 5

Abgabe der Lösungen: 8.07.21

---

## Aufgabe 1 Partition Refinement mittels Knaster-Tarski

(9 Punkte)

Wir erinnern an die folgende Konstruktion aus der Vorlesung: Sei  $T = (\text{Proc}, \mathcal{L}, \{\xrightarrow{\alpha}\}_{\alpha \in \mathcal{L}})$  ein LTS. Die Menge  $\mathcal{P}(\text{Proc} \times \text{Proc})$  der binären Relationen über  $\text{Proc}$  ist ein vollständiger Verband bezüglich Mengeninklusion  $\subseteq$ . Sei  $\mathcal{F} : \mathcal{P}(\text{Proc} \times \text{Proc}) \rightarrow \mathcal{P}(\text{Proc} \times \text{Proc})$  der wie folgt definierte Operator: für  $\mathcal{R} \in \mathcal{P}(\text{Proc} \times \text{Proc})$  gilt  $(s, t) \in \mathcal{F}(\mathcal{R})$  g.d.w.

- $s \xrightarrow{\alpha} s'$  impliziert, dass ein  $t'$  existiert, so dass  $t \xrightarrow{\alpha} t'$  und  $(s', t') \in \mathcal{R}$ , und
- $t \xrightarrow{\alpha} t'$  impliziert, dass ein  $s'$  existiert, so dass  $s \xrightarrow{\alpha} s'$  und  $(s', t') \in \mathcal{R}$ .

Man definiert eine Familie  $(\sim_i)_{i \geq 0}$  von Relationen durch

- $s \sim_0 t$  stets,
- $s \sim_{i+1} t$  gdw. für jede Aktion  $\alpha \in \mathcal{L}$  gilt:
  - Wenn  $s \xrightarrow{\alpha} s'$ , dann existiert  $t'$  mit  $t \xrightarrow{\alpha} t'$  und  $s' \sim_i t'$ ;
  - Wenn  $t \xrightarrow{\alpha} t'$ , dann existiert  $s'$  mit  $s \xrightarrow{\alpha} s'$  und  $s' \sim_i t'$ .

Wie in der Vorlesung bewiesen, wenn  $T$  endlich ist, dann existiert  $n$ , dass  $\sim = \sim_i$  für alle  $i \geq n$ .

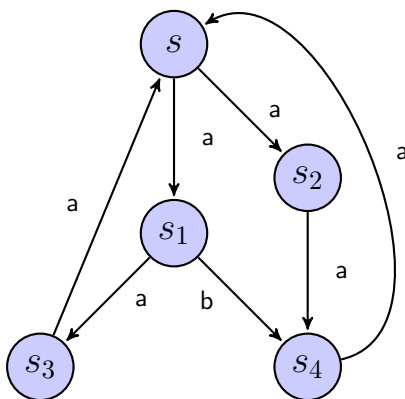
- Zeigen Sie, dass  $\sim = \bigcap_{i \geq 0} \sim_i$  gilt, wenn  $T$  endlich verzweigend (und nicht unbedingt endlich!) ist.
- Geben Sie ein Beispiel von endlich verzweigende  $T$ , mit der Eigenschaft, dass  $\sim = \sim_n$  für kein  $n$ .
- Zeigen Sie (per Gegenbeispiel), dass die Gleichheit in (a) ohne endliche Verzweigung nicht gilt.

**Hinweis:** Verwenden Sie zunächst Teilaufgabe (b) um eine unendliche Folge  $T, T_0, T_1, \dots$  zu konstruieren mit der Eigenschaft, dass  $T \sim_i T_i$  für alle  $i$ , aber  $T \not\sim T_i$  für kein  $i$ .

## Aufgabe 2 Bisimilarität durch Partition Refinement

(5 Punkte)

Verwenden Sie den Algorithmus aus Aufgabe 1, um die Bisimilaritätsrelation auf



zu berechnen.

### Aufgabe 3 Tautologien der Hennessy-Milner-Logik (6 Punkte)

Beweisen Sie, dass die folgenden Formeln in Hennessy-Milner-Logik gültig sind, d.h. in jedem Zustand in jedem LTS erfüllt sind

1.  $[\alpha](\phi \rightarrow \psi) \rightarrow ([\alpha]\phi \rightarrow [\alpha]\psi)$
2.  $\langle \alpha \rangle(\phi \vee \psi) \leftrightarrow (\langle \alpha \rangle\phi \vee \langle \alpha \rangle\psi)$
3.  $(\langle \alpha \rangle\phi \wedge [\alpha]\psi) \rightarrow \langle \alpha \rangle(\phi \wedge \psi).$

Dabei sind  $\rightarrow$  und  $\leftrightarrow$  wie üblich durch  $\phi \rightarrow \psi := \neg\phi \vee \psi$  und  $\phi \leftrightarrow \psi := (\phi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \phi)$  definiert.