Übungsblatt 11

Abgabe der Lösungen: Fr. 12.2, 13:00

Aufgabe 1 Die Natürlichen Zahlen als Modell (Präsenzaufgabe)

Es sei $\mathbb{N}$ die Menge der natürlichen Zahlen einschließlich 0, also $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$. Stellen Sie $\mathbb{N}$ als ein Modell einer Signatur dar, die aus den folgenden Symbolen besteht:

- eine Konstante (also ein nullstelliges Funktionssymbol) 0;
- ein einstelliges Funktionssymbol s für die Nachfolgeroperation: $s(0) = 1$, $s(1) = 2$, usw.;
- zwei binäre Funktionssymbole $+$ und $\times$ für Addition und Multiplikation, geschrieben als Infixoperatoren mit der üblichen Präzedenz.

Wir erinnern uns an die folgenden Axiome der Peano-Arithmetik von Übungsblatt 8:

PA$_1$. $\forall x\ (\neg(0 = s(x)))$;

PA$_2$. $\forall x, y\ (s(x) = s(y) \to x = y)$;

PA$_3$. $\forall x\ (x + 0 = x)$;

PA$_4$. $\forall x, y\ (x + s(y) = s(x + y))$;

PA$_5$. $\forall x\ (x \times 0 = 0)$;

PA$_6$. $\forall x, y\ (x \times s(y) = x \times y + x)$;

PA$_7$. $\forall y_1, \ldots, y_n\ \big(\phi(0, y_1, \ldots, y_n) \wedge \forall x\ (\phi(x, y_1, \ldots, y_n) \to \phi(s(x), y_1, \ldots, y_n)) \to \forall x\ \phi(x, y_1, \ldots, y_n)\big)$.

(a) Die Axiome PA$_1$–PA$_7$ gelten für $\mathbb{N}$, d.h. $\mathbb{N}$ ist ein Modell der Peano-Arithmetik, das sogenannte Standardmodell. Überprüfen Sie beispielsweise, dass PA$_4$ und PA$_6$ über $\mathbb{N}$ gelten.

(b) Überprüfen Sie, ob $\mathbb{N} \models \forall x, y\ (x + y = 0 \to (x = 0 \wedge y = 0))$ gilt.

Aufgabe 2 Natürliche vs. reelle Zahlen (Präsenzaufgabe)

Beweisen Sie, dass die *nicht-negativen reellen Zahlen* $\mathbb{R}^+$ unter den gleichen Interpretationen von 0, s, $+$ und $\times$ (d.h. $s(x) = x + 1$, $+$ wird als Addition, $\times$ als Multiplikation und 0 als 0 interpretiert) **kein** Modell der Peano-Arithmetik sind. Finden Sie dazu ein Peano-Axiom, das über $\mathbb{R}^+$ nicht gilt.

Aufgabe 3 Modellierung gerichteter Mengen (20 Punkte)

Wir betrachten in dieser Aufgabe *gerichtete Mengen*, d.h. Modelle, die die folgenden Axiome erfüllen:

$$\textit{Reflexivität:} \quad \forall x\ (\mathsf{R}(x,x)) \tag{1}$$

$$\textit{Transitivität:} \quad \forall x,y,z\ ((\mathsf{R}(x,y) \land \mathsf{R}(y,z)) \rightarrow \mathsf{R}(x,z)) \tag{2}$$

$$\textit{Existenz einer oberen Schranke:} \quad \forall x,y\ (\exists z\ (\mathsf{R}(z,x) \land \mathsf{R}(z,y))) \tag{3}$$

Im Sinne von Aufgabe 5, Übungsblatt 10, sind gerichtete Mengen also Präordnungen, die zusätzlich (3) erfüllen.

(a) Zeigen Sie unter Verwendung Ihrer Lieblingsmethode (Resolution, Fitch oder Coq), dass die obigen Axiome zusammen mit der Formel *7 Punkte*

$$\forall x\ (\exists y\ (\neg \mathsf{R}(x,y))) \tag{4}$$

die folgende Eigenschaft implizieren:

$$\forall x\ (\exists y\ (\mathsf{R}(y,x) \land \neg \mathsf{R}(x,y))) \tag{5}$$

(b) Zeigen Sie, dass die Formeln (1)–(4) im Standardmodell der natürlichen Zahlen aus Aufgabe 1., d.h. in $\mathbb{N}$, erfüllt sind; verwenden Sie dabei die folgende Interpretation von R: *7 Punkte*

$$\mathbb{N}[\![\mathsf{R}]\!] = \{(x,y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid x \text{ ist größer oder gleich } y\}.$$

Gehen Sie hierbei Schritt für Schritt vor, entsprechend der rekursiven Definition aus der Vorlesung. Erläutern Sie die intuitive Bedeutung der Ergebnisse von Teilaufgabe (a) in Bezug auf dieses Modell.

(c) Bilden Sie ein Modell, das R interpretiert und das die Axiome (1)–(4) erfüllt, aber im Gegensatz zu Teilaufgabe (b) mindestens zwei *unvergleichbare* Elemente a und b enthält; dabei sind a und b unvergleichbar g.d.w. weder $\mathsf{R}(a,b)$ noch $\mathsf{R}(b,a)$ gilt. *6 Punkte*

Hinweis: Es bietet sich z.B. an, als Grundbereich des Modells das kartesische Produkt $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ zu verwenden.

Aufgabe 4 Bonusaufgabe: Unendliche Modelle (+5 Punkte)

Wir betrachten erneut die Axiome (1)-(4) aus Aufgabe 3. Beweisen Sie, dass diese Axiome zusammen in keinem endlichen Modell erfüllt sein können.