Grundlagen der Logik in der Informatik WS 2020

Übungsblatt 10

Abgabe der Lösungen: Fr. 05.2, 13:00

Aufgabe 1 Unifikation (Präsenzaufgabe)

Verwenden Sie den Unifikationsalgorithmus aus der Vorlesung, um zu entscheiden, ob die folgenden Gleichungen in der Signatur der Peano-Arithmetik (siehe Aufgabe 1, Übungsblatt 8) unifizierbar sind (d.h. einen Unifikator besitzen), und gegebenenfalls einen allgemeinsten Unifikator zu berechnen.

1. $(x+0)+(y+0) \doteq x+s(x)$;
2. $x+s(y) \doteq 0+s(s(x))$.

Annotieren Sie dabei alle Umformungsschritte explizit mit der jeweils verwendeten Regel des Unifikationalgorithmus.

Was passiert, wenn man den Occurs-Check aus dem Unifikationsalgorithmus weglässt, d.h. (elim) auf $x \doteq E$ anwendet, ohne zu prüfen, ob $x \in FV(E)$?

Aufgabe 2 Ärzte und Quacksalber (Präsenzaufgabe)

Wir betrachten erneut die Aussagen aus Aufgabe 3, Übungsblatt 9:

1. "Es gibt einen Patienten, der alle Ärzte mag": $\exists x\ (\mathsf{P}(x) \wedge \forall y\ (\mathsf{D}(y) \to \mathsf{L}(x,y)))$
2. "Kein Patient mag Quacksalber": $\forall x\ (\mathsf{P}(x) \to \forall y\ (\mathsf{Q}(y) \to \neg\mathsf{L}(x,y)))$
3. "Kein Arzt ist Quacksalber": $\forall x\ (\mathsf{D}(x) \to \neg\mathsf{Q}(x))$

Beweisen Sie nun mittels Resolution, dass die Formel 3. aus den Formeln 1. und 2. folgt.

Aufgabe 3 Unifikation (6 Punkte)

Verwenden Sie den Unifikationsalgorithmus, um zu entscheiden, ob die folgenden Gleichungen in der Signatur der Gruppentheorie (siehe Aufgabe 2, Übungsblatt 9) unifizierbar sind (d.h. einen Unifikator besitzen), und gegebenenfalls einen allgemeinsten Unifikator zu berechnen.

2 Punkte 1. $z*(x*(x*i(x))) \doteq (y*x)*((z*z)*y)$;

2 Punkte 2. $i((x*x)*i(e))*y \doteq y*i(z*i(x))$.

Achtung: Annotieren Sie dabei alle Umformungsschritte explizit mit der jeweils verwendeten Regel des Unifikationalgorithmus.

2 Punkte Was passiert jeweils, wenn man den Occurs-Check aus dem Unifikationsalgorithmus weglässt, d.h. (elim) auf $x \doteq E$ anwendet, ohne zu prüfen, ob $x \in FV(E)$?

Aufgabe 4 Allgemeinste Unifikatoren (2 Punkte)

Geben Sie eine Gleichung zwischen Termen an, für welche der Unifikationalgorithmus mindestens **zwei** verschiedene allgemeinste Unifikatoren liefert (dazu muss man natürlich die Regeln in zwei unterschiedlichen Abfolgen anwenden).

Aufgabe 5 Äquivalenzrelationen und Gelichungen (12 Punkte)

Wir formalisieren einige bekannte Eigenschaften binärer Relationen prädikatenlogisch:

$$\begin{aligned}
\mathsf{reflexiv}(\mathsf{R}) &\equiv \forall x\ (\mathsf{R}(x,x))\\
\mathsf{transitiv}(\mathsf{R}) &\equiv \forall x,y,z\ ((\mathsf{R}(x,y) \land \mathsf{R}(y,z)) \to \mathsf{R}(x,z))\\
\mathsf{symmetrisch}(\mathsf{R}) &\equiv \forall x,y\ (\mathsf{R}(x,y) \to \mathsf{R}(y,x))\\
\mathsf{euklidisch}(\mathsf{R}) &\equiv \forall x,y,z\ ((\mathsf{R}(x,y) \land \mathsf{R}(x,z)) \to \mathsf{R}(y,z))
\end{aligned}$$

Eine binäre Relation R ist also beispielsweise genau dann transitiv, wenn wir für alle aufeinanderfolgenden Transitionen $\mathsf{R}(x,y)$ und $\mathsf{R}(y,z)$ stets auch die Transition $\mathsf{R}(x,z)$ haben.

Die Relation R ist genau dann eine Äquivalenzrelation, wenn sie reflexiv, transitiv und symmetrisch ist.

1. Beweisen Sie mittels prädikatenlogischer Resolution, dass eine Relation R eine Äquivalenzrelation ist, wenn sie reflexiv und euklidisch ist. Zerlegen Sie den Beweis in zwei Teile, indem Sie die folgenden Implikationen beweisen.

(a) $(\mathsf{reflexiv}(\mathsf{R}) \land \mathsf{euklidisch}(\mathsf{R})) \to \mathsf{symmetrisch}(\mathsf{R})$ *3 Punkte*

(b) $(\mathsf{symmetrisch}(\mathsf{R}) \land \mathsf{euklidisch}(\mathsf{R})) \to \mathsf{transitiv}(\mathsf{R})$ *4 Punkte*

2. *Gleichheit* ist eine Äquivalenzrelation, erfüllt aber auch weitere Bedingungen, die in Groben besagen, dass gleiche Dinge in beliebigen Kontexten gegenseitig ersetzt werden dürfen. Für Ersetzung in Termen nennt man diese Eigenschaft *Kongruenz*. Die folgenden Eigenschaften zusammengenommen besagen beispielsweise, dass R eine Kongruenz für eine binäre Operation m ist. *5 Punkte*

$$\begin{aligned}
\mathsf{linksKong}(\mathsf{R},m) &\equiv \forall x,y,z\ (\mathsf{R}(x,y) \to \mathsf{R}(m(x,z),m(y,z)))\\
\mathsf{rechtsKong}(\mathsf{R},m) &\equiv \forall x,y,z\ (\mathsf{R}(x,y) \to \mathsf{R}(m(z,x),m(z,y)))
\end{aligned}$$

Die folgende Aussage ist eine Uminterpretation von Aufgabe 2 aus Übungsblatt 9:

$$(\mathsf{rechtsKong}(\mathsf{R},m) \land \mathsf{transitiv}(\mathsf{R}) \land \forall x,y\ (\mathsf{R}(m(y,m(x,y)),x))) \to \forall x,y\ (\mathsf{R}(m(m(x,y),x),y))$$

(dabei m steht für \$, R steht für $=$, und die Äquivalenzaxiome, die in diesem konkreten Fall keine Rolle spielen sind weggelassen). Beweisen Sie diese Aussage mittels Resolution.