

Übungsblatt 4

Abgabe der Lösungen: Fr. 11.12, 13:00

Aufgabe 1 Beweise in Fitch

(Präsenzaufgabe)

Beweisen Sie folgende aussagenlogischen Formeln durch natürliches Schliessen (d.h. im Fitch-Kalkül):

- (a) $\neg A \rightarrow (A \rightarrow B)$;
- (b) $(A \rightarrow (B \wedge C)) \rightarrow (A \rightarrow B)$;
- (c) $(A \wedge (B \rightarrow \neg A)) \rightarrow (A \wedge \neg B)$.

Was lässt sich – nachdem die Formeln bewiesen sind – über die Erfüllbarkeit und die Allgemeingültigkeit der einzelnen Formeln sagen?

Aufgabe 2 Beweise in Coq

(Präsenzaufgabe)

Coq ist ein halbautomatischer Beweiser [1], der unter anderem verwendet werden kann, um aussagenlogische Formeln zu beweisen. Die Beweise können dabei in gleicher Weise organisiert werden wie Fitch-Beweise. Als Beispiel betrachten wir den folgenden Beweis der allgemeingültigen Formel $(q \rightarrow p) \rightarrow (\neg p \rightarrow \neg q)$.

```

1 Require Import Classical_Prop.      (** Lemmas für klassische Logik **)
2
3 Parameters p q : Prop.             (** Deklaration aussagenlogischer
4                                     Variablen p und q **)
5 Theorem T1 : (q->p)->(¬p->¬q).      (** T1 ist der Name des Theorems **)
6 Proof.                             (** Anfang des Beweises **)
7 intro A.                             (** -> I **)
8 intro B.                             (** -> I **)
9 intro C.                             (** ~ I **)
10 assert p as D.
11 apply A; exact C.                   (** -> E **)
12 apply B; exact D.                   (** False I **)
13 Qed.                               (** Ende des Beweises **)

```

Hier werden die Namen *A*, *B* und *C* als Bezeichnungen für die Zwischenschritte verwendet; *intro*, *apply*, *assert* und *exact* sind sogenannte *Taktiken*, die sich, grob gesagt, ähnlich wie die Regeln des Fitch-Kalküls auswirken.

- Lesen Sie das Coq-Cheat-Sheet von Andrej Bauer [2], und vergegenwärtigen Sie sich anhand des Kapitels “Basic Tactics”, welche *Einführungs-* bzw. *Eliminations-*Regeln des Fitch-Kalküls jeweils welchen Coq-Taktiken (bzw. einfachen Kombinationen von Taktiken) entsprechen.

- Formalisieren Sie die Beweise aus Aufgabe 1 in Coq.

Hinweis: Die folgende Tabelle kann dabei helfen, zu einer Fitch-Regel jeweils die entsprechende Taktik zu finden.

Fitch-Regel	Coq-Taktik
\wedge I	<code>split.</code>
\wedge E ₁	<code>destruct H as [H0 _]; exact H0.</code>
\wedge E ₂	<code>destruct H as [_ H0]; exact H0.</code>
\vee I ₁	<code>left.</code>
\vee I ₂	<code>right.</code>
\vee E	<code>destruct H as [L R]. apply H0; exact L; apply H1; exact R.</code>
\rightarrow I	<code>intro.</code>
\rightarrow E	<code>apply H; exact H0.</code>
\neg I	<code>intro.</code>
\neg E	<code>apply NNPP.</code>
\perp I	<code>apply H.</code>
\perp E	<code>contradiction.</code>

Ferner ist es gelegentlich hilfreich, während eines Beweises von Hand benannte Unterziele einzuführen, die man, wenn sie bewiesen sind, als zusätzliche Annahmen verwenden darf. Dies geschieht mittels `assert (<Formel>) as <Name>`.

Aufgabe 3 Kirsch-Bananen-Kalkül (6 Punkte)

Wir definieren den Kirsch-Bananen-Kalkül wie folgt durch die Regeln (ii) bis (iv):

$$\frac{}{\text{🍒}} \text{ (i)} \quad \frac{\phi}{\text{🍌}\phi} \text{ (ii)} \quad \frac{\phi \text{🍌} \quad \text{🍌}\psi}{\phi\psi} \text{ (iii)} \quad \frac{\phi}{\text{🍒}\phi\text{🍌}} \text{ (iv)}$$

Dabei sind ϕ und ψ **nichtleere** Zeichenketten, die aus 🍒 und 🍌 bestehen (d.h. die „Formeln“ des Kalküls sind durch die folgende Grammatik definiert: $\phi ::= \text{🍒} \mid \text{🍌} \mid \text{🍒}\phi \mid \text{🍌}\phi$). Die Zeichenkette $\text{🍒}\text{🍒}\text{🍒}$ lässt sich beispielsweise wie folgt herleiten:

$$\frac{\frac{\frac{}{\text{🍒}} \text{ (i)}}{\text{🍒}\text{🍒}} \text{ (iv)} \quad \frac{\frac{}{\text{🍒}} \text{ (i)}}{\text{🍌}\text{🍒}} \text{ (ii)}}{\text{🍒}\text{🍒}\text{🍌}} \text{ (iii)}}{\text{🍒}\text{🍒}\text{🍒}}$$

(a) Beweisen Sie, dass jede Zeichenkette der Form $\text{🍌}\text{🍒}\dots\text{🍒}\text{🍌}$ mit einer geraden und positiven Anzahl von Kirschen im Kirsch-Bananen-Kalkül herleitbar ist. **Hinweis:** Induktion. 2 Punkte

(b) Beweisen Sie, dass die Zeichenkette $\text{🍒}\text{🍒}$ im Kirsch-Bananen-Kalkül **nicht** herleitbar ist. **Hinweis:** Beweisen Sie zunächst, dass $\text{🍒}\text{🍌}$ nicht herleitbar ist. 2 Punkte

(c) Beweisen oder widerlegen Sie, dass die Regel 2 Punkt

$$\frac{X \quad Y}{XY}$$

im Kirsch-Bananen-Kalkül zulässig ist. **Hinweis:** „Zulässig“ heißt, dass man, wenn man die neue Regel zum Kalkül hinzufügt, trotzdem keine neue Zeichenketten herleiten kann.

Hinweis: Verwenden Sie Teilaufgabe (b).

Aufgabe 4 Fitch mit Disjunktion

(4 Punkte)

Disjunktion ist bekanntermaßen durch Konjunktion und Negation definiert. Formeln, die Disjunktionen enthalten, kann man dementsprechend in zwei Schritten beweisen: zunächst \vee durch \wedge und \neg ersetzen, danach den Fitch-Kalkül verwenden. In der Vorlesung wurden ohne Herleitung Disjunktionsregeln eingeführt. Zunächst betrachten wir die Introduktionsregeln:

$$\frac{A}{A \vee B} \quad (\vee I_1)$$

$$\frac{B}{A \vee B} \quad (\vee I_2)$$

Sie lassen sich wie folgt im Fitch-Kalkül herleiten:

1	A		1	B	
2		$\neg A \wedge \neg B$	2		$\neg A \wedge \neg B$
3		$\neg A$	3		$\neg B$
		$\wedge E_1, 2$			$\wedge E_2, 2$
4		\perp	4		\perp
		$\perp I, 1, 3$			$\perp I, 1, 3$
5	$\neg(\neg A \wedge \neg B)$	$\neg I, 2-4$	5	$\neg(\neg A \wedge \neg B)$	$\neg I, 2-4$

Nun betrachten wir die Disjunktions-Eliminationsregel genauer:

$$\frac{\frac{A}{\vdots} \quad \frac{B}{\vdots}}{C} \quad A \vee B \quad (\vee E)$$

Leiten Sie diese Regel im Fitch-Kalkül her.

Hinweis: Führen Sie den Beweis, indem Sie in einem Teilbeweis $\neg C$ annehmen und per Beweis durch Widerspruch $\neg\neg C$ herleiten.

Aufgabe 5 Lückenhafte Beweislage

(6 Punkte)

jeweils
2 Punkte

Vervollständigen Sie die folgenden Fitch-Beweise, indem Sie die fehlenden Formeln sowie die dazugehörigen Regelanwendungen angeben.

