

# Übungsblatt 1

Abgabe der Lösungen: Fr. 20.11, 13:00

---

## Aufgabe 1 Popeye der Seemann

(Präsenzaufgabe)



*Popeye* hat 5 Dosen Spinat. Er weiß aber, dass genau zwei davon von seinem Gegner *Bluto* ausgetauscht worden sind. Er weiß auch, dass eine von den falschen Dosen genau 1 g leichter und eine genau 1 g schwerer ist als die richtigen. Kann Popeye mit einer Schalenwaage die echten Spinatdosen von den gefälschten trennen und auch genau sagen, welche leichter und welche schwerer ist? Er hat allerdings nur genug Kraft für drei Wägungen.

## Aufgabe 2 Verstärkung im Induktionsbeweis (Präsenzaufgabe)

Beweisen Sie, dass

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{n^2} < 2.$$

für alle natürlichen Zahlen  $n \geq 1$ .

**Hinweis:** Man erfinde eine geeignete Funktion  $f$

über den positiven reellen Zahlen, so dass

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{n^2} \leq 2 - f(n).$$

## Aufgabe 3 Course-of-Values-Induktion

(Präsenzaufgabe)

Beweisen Sie folgende Behauptungen durch Induktion über  $n \in \mathbb{N}$ : Sei  $x$  eine reelle Zahl, so dass  $x + 1/x$  eine ganze Zahl ist. Dann ist  $x^n + 1/x^n$  auch eine ganze Zahl.

## Aufgabe 4 Fehlerhafte Induktion

(Präsenzaufgabe)

Was ist bei den folgenden Induktionsbeweisen falsch gelaufen?

### Alle Zahlen sind gleich.

Wir beweisen mittels Induktion, dass alle zwei benachbarten natürlichen Zahlen gleich sind, d.h. wir beweisen, dass für alle  $n \in \mathbb{N}$  die Formel

$$n = n + 1$$

gilt. Dazu nehmen wir an, dass diese Formel für alle kleineren Werte von  $n$  gilt. Dann muss die Formel insbesondere für den vorherigen Wert des Parameters  $n$ , also für  $n - 1$ , wahr sein. Das bedeutet:  $(n - 1) = (n - 1) + 1$ , also  $n - 1 = n$ . Indem wir auf beiden Seiten der Gleichung 1 addieren, erhalten wir  $n = n + 1$ .

### Alle Schafe einer Herde haben die gleiche Farbe.

Beweis per Induktion über die Größe  $n$  der Herde:

*Induktionsanfang*  $n = 1$ : klar.

*Induktionsschritt*  $n - 1 \rightarrow n$ : Wir betrachten eine Herde von  $n$  Schafen. Wenn wir ein Schaf herausnehmen, bleibt eine Herde von  $n - 1$  Schafen, die nach Induktionsvoraussetzung alle die gleiche Farbe haben, übrig. Jetzt fügen wir das herausgenommene Schaf wieder hinzu und nehmen ein anderes Schaf heraus; auch hier haben die übriggebliebenen  $n - 1$  Schafe nach Induktionsvoraussetzung alle die gleiche Farbe. Also haben alle  $n$  Schafe der Herde die gleiche Farbe.

## Aufgabe 5 Mord im Schlosspark

(4 Punkte)

Kurz nach einem heftigen Schneefall betrat Kevin Schmitt den Schlosspark durch *Tor D*, ging geradewegs in die Mitte des Parks und wurde mit einem Stich ins Herz ermordet. Sein Körper wurde am nächsten Morgen zusammen mit einer Reihe von Spuren im Schnee gefunden. Die Polizei riegelte den Park sofort ab.

Wie die sich anschließenden polizeilichen Untersuchungen zeigten, ließ sich jede Spur einem jeweils anderen, sehr typischen Paar Schuhe zuordnen. In der entscheidenden Zeitspanne hatten Zeugen, abgesehen von Schmitt, vier Individuen im Park beobachtet.

Daher musste der Mörder einer von ihnen sein. Die Polizei, die die Schuhe der Verdächtigen untersuchte, kam zu folgendem Schluss:

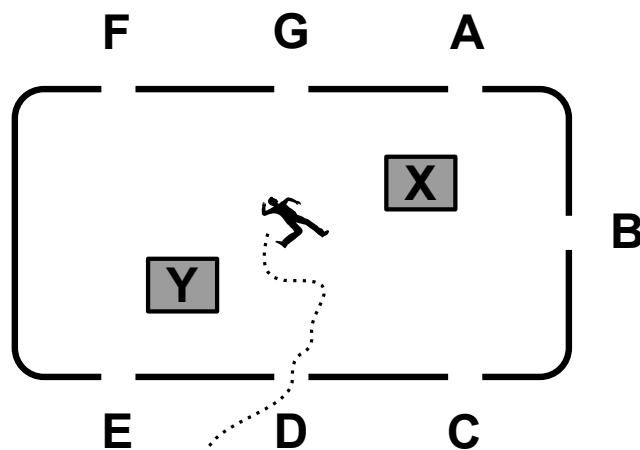


Abbildung 1: Schlosspark: Tatablauf

- Der Butler, der beweisen konnte, dass er sich zum Zeitpunkt des Mordes in *Haus X* aufgehalten hatte, hatte den Park durch *Tor E* betreten und war ins *Haus X* gegangen.
- Der Wildhüter, der kein Alibi hatte, hatte den Park durch *Tor A* betreten und seine *Hütte Y* aufgesucht.
- Ein junger Mann aus dem Dorf hatte den Park durch *Tor G* betreten und durch *Tor B* verlassen.

- Die Frau des Krämers hatte den Park durch *Tor C* betreten und durch *Tor F* verlassen.

Keine der Personen betrat oder verließ den Park mehr als ein einziges Mal.

Es war nicht nur Schnee gefallen, sondern auch sehr neblig gewesen, daher waren die Routen, die diese vier Personen eingeschlagen hatten, oft recht verschlungen. Die Polizei stellte fest, dass sich keine zwei Spuren kreuzten. Aber sie unterließ es, eine Skizze der Routen zu machen, bevor der Schnee schmolz und die Spuren verschwanden.

Wer also war der Mörder? Skizzieren Sie zur Begründung zu Ihrer Antwort die Laufwege aller betroffener Personen auf dem Parkplan.

## Aufgabe 6 Fehlerhafte Induktion (4 Punkte)

Was ist bei dem folgenden Induktionsbeweis falsch gelaufen? Begründen Sie Ihre Antwort.

Wir beweisen für jede Zahl  $n \in \mathbb{N}$ , dass alle beliebigen  $n$  Punkte auf einer gemeinsamen Geraden liegen.

Für  $n = 1$  und  $n = 2$  ist dies klar (der Euklidischen Geometrie liegen entsprechende Axiome zu Grunde). Es bleibt also übrig, die Behauptung für jedes  $n > 2$  zu beweisen, vorausgesetzt, dass sie für  $n - 1$  wahr ist. Seien also  $A_1, A_2, \dots, A_{n-1}, A_n$  (für  $n > 2$ )  $n$  beliebige Punkte. Wir betrachten nun die ersten  $n - 1$  dieser Punkte und wenden die Induktionshypothese an. Wir erhalten die Gerade  $l$ , auf der die Punkte  $A_1, A_2, \dots, A_{n-1}$  liegen.

Wir müssen beweisen, dass der letzte Punkt  $A_n$  auf der gleichen Gerade liegt. Nun betrachten wir die letzten  $n - 1$  Punkte und wenden erneut die Induktionshypothese an, diesmal auf die Punkte  $A_2, A_3, \dots, A_n$ . Wir erhalten eine Gerade  $l'$  auf der diese Punkte liegen. Können die Geraden  $l$  und  $l'$  verschieden sein? Nein, denn sie gehen beide durch die Punkte  $A_2$  und  $A_{n-1}$ , und wie wir aus der Geometrie wissen, kann nur eine Gerade durch zwei Punkte gezogen werden. Die Geraden  $l$  und  $l'$  fallen also zusammen und laufen durch alle  $n$  Punkte.

## Aufgabe 7 Verstärkung im Induktionsbeweis (6 Punkte)

Beweisen Sie, dass

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdots \frac{2n-1}{2n} < \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

für alle natürlichen Zahlen  $n \geq 1$ .

**Hinweis:** Man verwende das Induktionsverstärkungsprinzip, indem man eine stärkere Ungleichung beweise, und zwar, dass das Produkt kleiner oder gleich  $1/\sqrt{n + \frac{1}{2}}$  ist. Warum ist dies eine stärkere Aussage?

## Aufgabe 8 Course-of-Values-Induktion (6 Punkte)

Sei  $a_0, a_1, \dots$  eine unendliche Folge von natürlichen Zahlen (inklusive 0), so dass  $a_1 = 1$  und die folgende Bedingung gilt:

$$a_{m+n} + a_{m-n} = \frac{1}{2}(a_{2m} + a_{2n})$$

für alle  $m \geq n \geq 0$ . Beweisen Sie, dass  $a_n = n^2$  für alle  $n \geq 0$ .

**Hinweis:** Beweisen Sie zunächst, dass  $a_0 = 0$  und dass  $a_{2n} = 4a_n$  für alle  $n$ . Beweisen Sie danach, unter Verwendung dieser Hilfsaussage, die Hauptaussage per Induktion über  $n$ . Sie müssen dabei Course-of-Values-Induktion verwenden; genauer gesagt brauchen im Induktionsschritt die Induktionsannahme für die zwei vorherigen Schritte.